素粒子物理学

井上研三 著

共立出版

まえがき

素粒子物理学は，ミクロの世界の自然法則を解き明かしていく学問分野である．ミクロの世界に，はたして終着点があるのかどうかはわからない．終着点があるとすると，そこにはどのような世界が開けているのだろうか．あるいは，もし終着点がなければ，素粒子物理学の研究は果てしない旅路になるのであろうか．

1930年代に誕生した素粒子物理学は，誕生以来これまでに，幾多の革新をへてきた．その一つひとつによって，自然観が確実に深められてきて，現代に至っている．それらの中でも，1970年代に起った変革は，大変目覚ましいものであった．ゲージ理論と呼ばれる力学の体系が構築されたことによって，素粒子の世界を表現する大変信頼できる方法が確立したのである．それは，対称性というものの見方を，究極まで純粋化したものである．その自然観は，現在においても，素粒子物理学の進展に欠くことのできない指針になっているといえる．

現在，素粒子物理学には，規範として，標準理論と呼ばれるものが存在している．それは，ゲージ理論にもとづいて，これまでに明らかにされているミクロの世界を表現したものである．この理論は，それまでに知られていたもろもろの現象をうまく説明するだけでなく，新たにいろいろなことを予言する．それらの予言は，高エネルギー物理学と呼ばれる素粒子の世界を実験的に解明する研究によって，これまでに逐一テストされてきた．その結果，標準理論が大枠としては正しく自然を記述していることが実験的に裏付けられた．高エネルギー物理学の現在の中心課題は，標準理論よりさらに基本的なレベルで自然の姿を解明していくことに移っている．今後近いうちに，素粒子物理学に，さら

なる革新が起ることが予期されている．

この本は，物理学の基本的な考え方や方法を学習してきた理工系の大学の学部学生を対象として，現代素粒子物理学の基礎をなす「素粒子の標準理論」の内容を，できるだけ平易に説き明かすことを目標にしている．本書を読むにあたっては，力学，電磁気学，量子力学，特殊相対性理論の基本的な事柄の理解，および相対論的量子力学の入門的な知識を前提にしている．

素粒子の世界は，相対論と量子論が融合した相対論的場の量子論によって記述される．ゲージ理論も例外ではない．素粒子物理学の正統的な教科書においては，まず，場の作用積分を構成し，それを正準理論にもとづいて解析することによって，場の量子論を構成し，次に，それが表す物理現象の表現方法を組み立てるという手順が取られる．しかしこれらは，この本が想定しているレベルと容量をはるかに越えている．

この本では，これらの手順をすべて省略し，皆がすでになれ親しんでいるであろうマックスウェル方程式，ディラック方程式およびクライン・ゴルドン方程式を出発点におき，そこから考察を深めることによって，素粒子の標準理論に向かう道をとった．場の量子論の知識がない読者でも，本文にそって読み進んでいくうちに，十分に理解を深めていくことができると思う．

とはいっても，これらの運動方程式に現れるのは量子論的な場の演算子であるから，場の量子論の基本的な考え方を正確に知っていると，本文の理解を大幅に高めることができる．その目的のために，巻末にその概説を付録としてのせた．第3章に進む前までに，A.1, A.2, A.5 に目を通しておくことを勧める．A.3, A.4 は第11章を読むときに役に立つ．A.6 はこの本のレベルからすると高度で専門的すぎる内容であるが，読者のチャレンジ精神を尊重してあえてのせた．

それぞれの章の章末には「自習問題」を幾つかのせている．これらの問題は，本文中では十分説明していないものを，「補充」の形で，読者に自ら手を動かして確認してもらうことを主な目的としている．問題文に従って進んでいけば容易に解ける問題がほとんどであるが，少し骨のある問題も含まれている．これらの問題には手を付けなくても，本文の学習には支障はないが，できるだけ取り組むことを期待している．

この本に記載しているいろいろな物理定数や実験データの値は The Review of Particle Physics, K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G

37.075021 (2010) に与えられているものを用いている.

末尾となって恐縮であるが，本書を世に出すきっかけを作り，またいろいろと協力してくれた久保博史君に感謝するとともに，出版を情熱を込めて担当された共立出版株式会社の島田誠氏には，いろいろとご迷惑をお掛けしつつも辛抱強くお付き合い下さり，本書出版の段に到ることができたこと，ただただ敬服致す次第である.

平成23年9月　　　　井上研三

目　次

コラム目次

CHAPTER 1

序　章

この自然界は，様々な物質によって構成されている．それらの物質の一つひとつがもつ個性的な性質が，多様な形で組み合わさって，この多彩で豊かな世界が作り上げられている．マクロな世界のこの多彩さを生み出すもととなる，根源的なミクロの世界の自然法則はどのようなものであろうか．素粒子物理学は，そのミクロの極限の自然法則を解明する学問である．

1.1 ミクロの世界

「素粒子」という呼び名は，物質を構成している一番基本的なもの（基本構成子）に付けられた名前である．原子は中心に原子核があり，その周りにいくつかの電子が回って構成されている．原子核を構成しているのは陽子と中性子であり，原子核の中にこれら 2 種の粒子が何個ずつ入っているかで多種多様な原子核の性質が実現されている．素粒子物理学は，原子核の「基本構成子」であるこれら陽子や中性子の性質を解明する学問分野として誕生した．今日では，陽子や中性子はクォークと呼ばれるさらに基本的な粒子が 3 個集まって構成されていることがわかっている．陽子は u クォーク 2 個と d クォーク 1 個から，中性子は d クォーク 2 個と u クォーク 1 個からできている．

現在のところ，電子やクォークがさらに基本的なものからできている実験的証拠は全くない．したがって今の段階ではこれらを自然界の基本構成子と見なすことになる．私たちの身の回りの物質は，電子 e^- と u, d クォークによって成り立っている．ところが，自然界にはこれら電子やクォークの仲間がもっとたくさん存在していることがわかっている．それらは質量が大きいため，何ら

かの反応で作り出されたとしても，すぐ崩壊してしまい大変短い寿命しかもたないとか，電気的に中性のため，物質に引き留められるのに十分な力を受けないとかの事情で，普通の状態の物質中には安定に存在し続けることはない．しかし，それらの粒子が備えている基本的な性質は電子 e^- や u, d クォークと同等であり，どれがどれより基本的だとはいえない．電子の仲間としては，電子 e^- のほかに μ^- や τ^- および電荷をもたない 3 種のニュートリノ ν_e, ν_μ, ν_τ が存在しており，これらはひとまとめにしてレプトンと呼ばれる．クォークの仲間にはこれまで u, d, s, c, b, t の 6 種類の存在が確認されている．

これらクォークやレプトンの間にはいくつかの力がはたらく．クォークの間にはたらいてそれらを結び付け陽子や中性子さらには原子核を作り上げるもととなる力は強い力，あるいは強い相互作用と呼ばれる．原子核と電子を結び付けて原子を作る力はクーロン力であるが，それはより一般的には電磁力，あるいは電磁相互作用と呼ばれる．天体のスケールになると物質（星）を構成するのに重要となるのは重力（万有引力）であるが，身の回りにある物体を形作るもととなる力としては重力はほとんど無視できる．

強い力と電磁力が物質を構成する基本的な力であるが，この自然には，このほかにも基本的な力が存在している．それは弱い力，あるいは弱い相互作用と呼ばれる．この力はその名のとおりとても小さいのでその効果はとても見にくい．放射性の物質から出される放射線に α 線，β 線および γ 線の 3 種類があるのはよく知られている．α 線は重たい原子核中の陽子 2 個と中性子 2 個がまとまって，ヘリウム原子核として飛び出してきたものであり，α 線放出の根幹にある力は強い力である．γ 線は励起状態の原子核がより低い準位に移る際に放出する波長が短くエネルギーの高い電磁波であり，この反応に関わるのは電磁力である．β 線の組成は電子である．電子は物質の基本構成子なので，β 線は原子核中にあった電子が放出されたものであろうと思えそうだが，実はそうではない．電子のような軽い粒子を原子核ほどの小さな領域に引き付けておくような力は存在しない．β 線は原子核中の中性子が，ある力によって陽子に転換する際に生成放出された電子である．この時，同時にニュートリノも生成放出されている．この過程は中性子の β 崩壊と呼ばれるが，よりミクロなレベルでは中性子中の 1 個の d クォークが u クォークに転換する崩壊過程によって引き起こされている．これらの過程を引き起こす反応振幅が小さいため，この力は弱い力と呼ばれる．この力は小さいが，粒子を別の粒子に転換させたり，また

強い力や電磁力の及ばないニュートリノの生成あるいは消滅にも関わるので，その作用の積み重ねは，物質世界の動向に大きな影響を与える．ビッグバン以来これまでの宇宙の進化や星の進化，宇宙における元素合成等においてこの力は重要な役割を担っている．

これまで物質を構成する材料粒子として基本構成子を，またそれらを結び付けあるいは転換を引き起こすものとして力を位置づけてきたが，実は，力もまた粒子によって媒介されている．20 世紀における現代物理学の発展の基盤を与えたのは相対性理論と量子論であった．相対性理論にもとづくと，いかなる力学的な作用あるいは情報の伝播も因果律を満たしており，光速

$$c = 2.99792458 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s} \tag{1.1}$$

より速く伝わることはない．それは空間の隣接している領域を徐々に伝わって行き，空間にはそれを伝える場が存在している．この場の振動が波として伝播することによって，あらゆる力学的作用が引き起こされる．この場の代表的なものが電磁場であり，あらゆる電気磁気力は電磁場によって媒介されている．

他方，量子論が主張するところによると，粒子は同時に波としての性質も兼ね備えている．同様に波も粒子としての性質をもっている．これらの間を繋ぐのはプランク定数

$$\hbar = 6.582119 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV \cdot s} \tag{1.2}$$

であり，角振動数 ω の電磁波の波としての伝播は，量子論的にはエネルギー $E = \hbar\omega$ をもった粒子，すなわち光子の運動としてとらえることができる．強い力や弱い力も同様で，空間にはそれらを伝える場があり，それらの場の波としての振動の伝播に対応した粒子の運動を通して，これらの力の作用は生じている．

1.2 量子力学的粒子

素粒子の世界の現象は，ミクロな世界の力学である量子力学によって記述される．自然界にはいろいろな種類の素粒子があるが，それぞれは固有の属性を備えている．たとえば電子を考えてみよう．電子はある定まった大きさの電荷を帯びている．またある大きさの質量をもっている．この自然界には莫大な個

数の電子が存在しているわけだが，それらの電子1個1個は，すべて同じ性質をもっている．私たちは個々の電子に1個ずつ印を付けて識別することはできない．このことは，ニュートン力学にもとづいた粒子の運動の古典的な記述では現れなかった新たな特性が，ミクロな世界の粒子の記述に現れることを意味している．区別できない粒子が複数個集まった力学系を量子力学にもとづいて記述しようとすると，粒子には統計性と呼ばれる属性が現れてくる．

量子力学において力学系の状態は，状態ベクトル $|\Psi\rangle$ で表される．今，2個の同種粒子の系を考えてみよう．その状態を $|\Psi(a,b)\rangle$ と書いてみる．この a と b の添字によって2つの粒子がそれぞれどういう状態にあるのかを指定している．ここで2つの粒子が入れ替わった状態を考えてみる．それは $|\Psi(b,a)\rangle$ と表されるはずである．2つの粒子は個々には識別できないのであるから，これら2種の状態は量子力学的には等価である．$|\Psi(a,b)\rangle$ と $|\Psi(b,a)\rangle$ があらゆる観測可能な物理量に対して全く同等な結果を与えるためには，それらの間には一番ゆるく考えても

$$|\Psi(b,a)\rangle = \eta|\Psi(a,b)\rangle \tag{1.3}$$

の関係が成り立っていなければならない．ここで η は絶対値が1の複素数である．2つの粒子の入れ替えを二度行うともとの状態にもどるから，η は

$$\eta^2 = 1 \tag{1.4}$$

を満たさなければならない．すなわち，$\eta = +1$ あるいは $\eta = -1$ のいずれかである．このような性質は粒子の統計性と呼ばれる．$\eta = +1$ はボーズ・アインシュタイン統計，$\eta = -1$ はフェルミ・ディラック統計といわれ，粒子はその基本的属性として，いずれかの統計性を備えている．前者の粒子はボソン，後者はフェルミオンと呼ばれる．電子はフェルミオンである．フェルミオンの特徴的な性質は(1.3)で $\eta = -1, a = b$ とおくことにより

$$|\Psi(a,a)\rangle = 0 \tag{1.5}$$

すなわち，2個の同種のフェルミオンは同一の量子状態に同時には存在しえないことである．これは電子におけるパウリの排他原理として，原子のエネルギー準位を理解するときに不可欠なものであった．一般に同種粒子の多粒子系において，任意の2個の粒子の入れ替えに対してボソン系では状態は不変（完

全対称）なもののみ，フェルミオン系では状態は符合が反転する（完全反対称な）もののみがゆるされる．

1.3 粒子のスピン

統計性とともに粒子の量子力学的性質を特徴付けるものとして重要な役割を担うのは粒子のスピン角運動量である．粒子の座標を $\vec{x}$，運動量を $\vec{p}$ と表すと，粒子はその運動に付随して軌道角運動量

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} = (L_x, L_y, L_z) \tag{1.6}$$

をもつが，それとともに粒子固有の，直観的には粒子の自転運動に付随した，スピン角運動量

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z) \tag{1.7}$$

ももっており，全角運動量はこれらの和

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{1.8}$$

で与えられる．スピンの自由度は軌道運動とは独立な力学的自由度だから，量子力学的演算子として $\vec{S}$ は $\vec{L}$ と可換 $S_iL_j - L_jS_i = 0$ $(i, j = x, y, z)$ であり，また角運動量の交換関係

$$S_xS_y - S_yS_x = i\hbar S_z, \quad S_yS_z - S_zS_y = i\hbar S_x, \quad S_zS_x - S_xS_z = i\hbar S_y \tag{1.9}$$

を満たす．角運動量の一般論によりスピン演算子は，その 2 乗が

$$\vec{S}^2 \equiv S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = s(s+1)\hbar^2 \tag{1.10}$$

を満たす．ここに s は整数 $(0,1,2,\cdots)$ もしくは半整数 $(1/2,3/2,5/2,\cdots)$ の定数であり，その値は粒子の属性として粒子ごとに定まっている．粒子のスピンについての量子力学的状態は，たとえば S_z の固有状態で分類すると，その固有値は $\hbar$ を単位として $\{-s, -s+1, \cdots, s\}$ であり，$2s+1$ 個の状態がゆるされる．電子のスピンは $s = 1/2$ であり 2 つのスピンの状態をとりうる．クォークやレプトンはすべて $s = 1/2$ である．

粒子はこのように量子力学的属性として，固有のスピンと固有の統計性を備えている．これら2つの属性は互いに全く無関係のように見えるが，実は密接に関係している．相対性理論と量子力学を矛盾無く融合した理論（相対論的場の量子論）によって粒子を記述しようとすると，整数スピンの粒子はボソンとして，半整数スピンの粒子はフェルミオンとしてしか存在しえない．これまでに自然界に存在が確認されているすべての粒子はこの規則を満たしている．

この規則は，複数個の粒子が束縛状態をなして全体で1つの粒子として振る舞っている系についても成り立つ．奇数個のフェルミオンの系はフェルミオンとして，偶数個のフェルミオンの系はボソンとしての統計性に従うことは，1個1個の粒子の入れ替えを順次行うことによって確かめることができる．系全体の「スピン」は構成粒子それぞれのスピン角運動量と系内の相対運動に付随した軌道角運動量を合成したものとなるが，半整数スピンが奇数個含まれているときには合成角運動量は半整数となり偶数個のときは整数となる．陽子や中性子は3個のクォークを含んでいるのでフェルミオンであり，それらのスピンはともに $s = 1/2$ である．

1.4 相対性理論

質量 m の粒子が速度 $\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x}$ で自由運動しているとき，その粒子は運動量

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2}} \tag{1.11}$$

およびエネルギー

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \vec{v}^{\,2}/c^2}} \tag{1.12}$$

をもつ．したがって，運動量とエネルギーの間にはアインシュタインの関係式

$$(E/c)^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2c^2 \tag{1.13}$$

が成り立つ．E を $\vec{p}$ の関数として解くと

$$E(\vec{p}) = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}} \ \geq mc^2 \tag{1.14}$$

となる．mc^2 は粒子の静止エネルギーである．質量 m がどのような値であっても，速度は方程式

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{x} = \frac{\partial E(\vec{p})}{\partial \vec{p}} = \frac{c^2\vec{p}}{E(\vec{p})} \tag{1.15}$$

を満たす．これらの式から，質量が 0 の粒子は常に光速 c で走ることがわかる．光の粒子である光子は質量 0 である．

エネルギーや運動量を相対論的に見通し良く取り扱うには，4 元運動量

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E/c, \vec{p}) \tag{1.16}$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, -\vec{p}) \tag{1.17}$$

を導入すると便利である．(1.13) は次のように表せる．

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2 \tag{1.18}$$

ここに上付きと下付きで同じギリシャ文字の添字が 1 つの項の中に同時に出てきたときは，それらについて 0, 1, 2, 3 の和がとられているものと約束する．これを添字の縮約という．

4 元運動量に限らず，任意の 4 元ベクトル A^μ（より高階のテンソルについても同様）の上付き添字と下付き添字は 4 行 4 列のメトリックテンソル

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

によって

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu}A^\nu \ , \ A^\mu = \eta^{\mu\nu}A_\nu \tag{1.20}$$

で結び付けられる．上付き（あるいは下付き）の添字同士で縮約されることはない．

4 元ベクトル A^μ など，ギリシャ添字の付いた量は，それらをどのような座標系で表すかによって値は異なる．たとえば p^μ は粒子が静止して見える座標系では $\vec{p} = 0$, $p^0 = mc$ だが，動いて見える座標系では $\vec{p} \neq 0$, $p^0 > mc$ である．しかし (1.18) が示しているように，ギリシャ添字が縮約された量 $A_\mu A^\mu$ は座標系によらない不変量となる．$(A_\mu + B_\mu)(A^\mu + B^\mu) = A_\mu A^\mu + A_\mu B^\mu + B_\mu A^\mu + B_\mu B^\mu$ が不変量であり $A_\mu B^\mu = B_\mu A^\mu$ であることから，任意の 2 つの 4 元ベクトルの縮約 $A_\mu B^\mu$ も不変量となる．

時刻 t と空間座標 $\vec{x}$ はひとまとまりで 4 元座標

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{x}) \tag{1.21}$$

をなしている．$\eta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = c^2t^2 - \vec{x}^2$ は不変量である．時刻 $t = 0$ に原点から放たれた光が，時刻 t に到達する座標点 $\vec{x}$ は $|\vec{x}| = ct$ である．$c^2t^2 - \vec{x}^2 = 0$ が不変量だから，別の座標系 $x'^\mu = (ct', \vec{x}')$ でも $|\vec{x}'| = ct'$ が成り立ち，光はどのような座標系で見ても速さ c で運動する．

運動法則の相対論的不変性は，運動方程式などが

$$X_\mu{}^\mu = Y \ , \quad X_\mu{}^{\mu\nu} = Y^\nu \tag{1.22}$$

のように，縮約されていない 4 元ベクトルの添字が，方程式のすべての項に共通に現れることによって実現される．

素粒子は強い力，電磁力，弱い力を通して互いに相互作用をするが，それらの反応の過程において 4 元運動量は加算的に保存される．たとえば，質量 m_a の粒子 a が質量 m_b と m_c の 2 個の粒子 b, c に

$$\mathrm{a} \longrightarrow \mathrm{b} + \mathrm{c} \tag{1.23}$$

と崩壊するときには，それぞれの粒子の 4 元運動量の条件式

$$p_{\mathrm{a}\mu}p_\mathrm{a}^\mu = m_\mathrm{a}^2c^2, \quad p_{\mathrm{b}\mu}p_\mathrm{b}^\mu = m_\mathrm{b}^2c^2, \quad p_{\mathrm{c}\mu}p_\mathrm{c}^\mu = m_\mathrm{c}^2c^2 \tag{1.24}$$

とともに，エネルギー運動量の保存則

$$p_\mathrm{a}^\mu = p_\mathrm{b}^\mu + p_\mathrm{c}^\mu \tag{1.25}$$

が成り立つ．粒子 a の重心系 ($\vec{p}_\mathrm{a} = \vec{p}_\mathrm{b} + \vec{p}_\mathrm{c} = 0$) で見ると，$\mu = 0$ 成分は

$$m_\mathrm{a}c^2 = E_\mathrm{b} + E_\mathrm{c} > m_\mathrm{b}c^2 + m_\mathrm{c}c^2 \tag{1.26}$$

となる．したがって，$m_\mathrm{a} > m_\mathrm{b} + m_\mathrm{c}$ が満たされていなければ崩壊 (1.23) は起きない．$E_\mathrm{threshold} \equiv m_\mathrm{b}c^2 + m_\mathrm{c}c^2$ は粒子 b, c が生成されるために必要なエネルギーの「しきい値」と呼ばれる．もっと複雑な過程においても同様で，反応を起す前のすべての粒子の 4 元運動量の総和は，反応後のすべての粒子の 4 元運動量の総和に等しい．

1.5 相対論的波動方程式

粒子の量子力学において，粒子のエネルギー E および運動量 $\vec{p}$ は，時刻 t および座標 $\vec{x}$ の微分演算と

$$E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla} \qquad (\ \vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{x}}\ ) \tag{1.27}$$

で対応付けられる．4 元座標 $x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{x})$ を用いると

$$p_{\mu} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{1.28}$$

である．(1.28) で $p_{\mu} = (E/c, -\vec{p})$ が下付き 4 元ベクトルになっていることに注意しよう．任意の関数 $f(t, \vec{x})$ の微少変化は

$$df(t, \vec{x}) = \frac{\partial f(t, \vec{x})}{\partial x^{\mu}}dx^{\mu} \tag{1.29}$$

だから，ギリシャ添字の縮約のルールにより，座標微分は下付 4 元ベクトルである．それを明示するため，しばしば

$$\partial_{\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ \vec{\nabla}\right) \tag{1.30}$$

$$\partial^{\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ -\vec{\nabla}\right) \tag{1.31}$$

と記される．

量子力学の対応 (1.28) にもとづくと，運動量 $\vec{p}$ およびエネルギー $E_p = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$ をもって自由運動している質量 m の粒子の波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ の座標依存性は,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi(t, \vec{x}) = p_{\mu}\psi(t, \vec{x}) \tag{1.32}$$

を満たす関数，すなわち平面波

$$\psi(t, \vec{x}) \propto \exp\frac{-i}{\hbar}(E_p t - \vec{p}\cdot\vec{x}) \tag{1.33}$$

で特徴付けられる．自由粒子の量子力学的運動を決定する運動方程式はこの平面波を解として与えるものでなければならない．相対論的不変性を満たす一番単純な方程式はクライン・ゴルドン方程式と呼ばれる 2 階の偏微分方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi(t, \vec{x}) = 0 \tag{1.34}$$

である．この方程式はアインシュタインの関係式 (1.13) において，(1.27) の量子力学の対応付けをしたもので，4 元表記では $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2c^2/\hbar^2)\psi = 0$ である．

スピンが 0 の粒子の運動は 1 個の波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ で記述される．その運動方程式として，相対論的に不変な方程式はクライン・ゴルドン方程式に限られる．したがって，クライン・ゴルドン方程式はスピンの自由度をもたない $s = 0$ のスカラー粒子にとっては，その自由運動を決定する基本的な運動方程式である．

スピンが 0 でない粒子の運動を量子力学で表現しようとすると，波動関数は粒子のスピン状態の自由度を取り入れるために，多成分 ψ^a が必要となる．エネルギーと運動量の間のアインシュタインの関係式は，どのようなスピンの粒子でも，自由運動をする限り成り立つので，波動関数の各成分 ψ^a はそれぞれクライン・ゴルドン方程式を満たすが，運動を決定する基礎方程式は，一般にはクライン・ゴルドン方程式より強い条件を与える方程式となる．

スピンが $s = 1/2$ の粒子の自由運動を決定する運動方程式はディラック方程式と呼ばれる．自然界の基本構成子であるクォークやレプトンは，すべてスピンが $s = 1/2$ の粒子であり，この運動方程式は素粒子の世界の理解のためには，とりわけ重要である．

ディラック方程式は，ハミルトニアンが H の量子力学のシュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \vec{x}) = H\psi(t, \vec{x}) \tag{1.35}$$

において，相対論的不変性からの必要条件として，H が座標 $\vec{x}$ の微分について 1 次までしか含まないこと，および，この方程式の解が自動的にクライン・ゴルドン方程式を満たすことを要請すると導かれる．これらの要請を満足させるためには波動関数 ψ は 4 成分

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} \tag{1.36}$$

が必要である．ハミルトニアンは 4 行 4 列の定数行列 $\vec{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3), \beta$ を用いて

$$H = c\vec{\alpha} \cdot (-i\hbar\vec{\nabla}) + mc^2\beta \tag{1.37}$$

と表され，行列 $\vec{\alpha}, \beta$ は

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij} \ , \ \ \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \ , \ \ \beta^2 = 1 \tag{1.38}$$

を満たす．H のエルミート性 $\int d^3\vec{x}\ \psi^\dagger H\psi = \int d^3\vec{x}\ (H\psi)^\dagger\psi$ の要請により $\vec{\alpha}, \beta$ はエルミート行列 $\alpha^{i\dagger} = \alpha^i, \beta^\dagger = \beta$ ($\alpha^\dagger \equiv \alpha^{*T}$: $*$は複素共役, T は転置) となる．相対論的 4 元表記ですっきりと書くため，通常は 4 個のディラック行列 γ^μ を $\gamma^0 \equiv \beta, \gamma^i \equiv \beta\alpha^i$ で定義して，ディラック方程式は次のように与えられる．

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi(t, \vec{x}) = 0 \tag{1.39}$$

ディラック行列 γ^μ は (反) エルミート性

$$\gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \ \ \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i \tag{1.40}$$

および反交換関係

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{1.41}$$

を満たすが，よく使われる標準表示では次のように与えられる．

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \ , \ \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

ここに σ^0 は 2 行 2 列の単位行列で，$\sigma^i (i = 1, 2, 3)$ はパウリのスピン行列

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ , \ \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.43}$$

である．粒子のスピン角運動量 $\vec{S}$ は

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma} \qquad \Sigma_x \equiv i\gamma^2\gamma^3 \ , \ \Sigma_y \equiv i\gamma^3\gamma^1 \ , \ \Sigma_z \equiv i\gamma^1\gamma^2 \tag{1.44}$$

で与えられ，全角運動量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ がハミルトニアン H と可換な保存量となる．$\vec{S}$ は交換関係 (1.9) を満たしており $\vec{S}^2 = (3/4)\hbar^2$ となるので，(1.10) よりディラック方程式がスピン $s = 1/2$ の粒子を表現していることが理解できる．

スピン角運動量 $\vec{S}$ の運動量 $\vec{p}$ 方向への射影

$$h \equiv \frac{\vec{S}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{1.45}$$

はヘリシティと呼ばれ，自由運動の恒量である（自習問題 [**5**] 参照）.

ディラック方程式の解で一番簡単なものは，運動量が $\vec{p}=0$ でエネルギーが $E=mc^2$ の静止した粒子の状態の解である．そのような解は線形独立なものが 2 つ存在する．標準表示ではそれらはたとえば

$$\psi^{(1)} \propto e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \psi^{(2)} \propto e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1.46}$$

ととれる．$\psi^{(1)}$ と $\psi^{(2)}$ はスピン状態がそれぞれ $S_z=+\frac{1}{2}\hbar$ および $S_z=-\frac{1}{2}\hbar$ の固有状態になっている．

1.6 反粒子

スピンが 0 のスカラー粒子の運動方程式であるクライン・ゴルドン方程式 (1.34) は 2 階の偏微分方程式のため，(1.33) の平面波解のほかに，現実には粒子の運動状態としてゆるされるはずのない負のエネルギー $E=-E_p=-c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}$ をもった

$$\psi(t,\vec{x}) \propto \exp\frac{i}{\hbar}(E_pt-\vec{p}\cdot\vec{x}) \tag{1.47}$$

も解としてゆるしてしまう．スピン 1/2 のディラック方程式 (1.39) は 1 階の偏微分方程式であるが，相対論的不変性を実現するために ψ がスピン状態の自由度の 2 倍の 4 成分必要であったことにより，やはり負のエネルギー解をゆるしてしまう．たとえば静止粒子の場合，(1.46) の解に加えて $E=-mc^2$ をもった

$$\psi^{(3)} \propto e^{\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \psi^{(4)} \propto e^{\frac{i}{\hbar}mc^2t}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{1.48}$$

も解となる．このように相対論的に不変な波動方程式は不可避的に正エネルギー解に加えて負のエネルギーの解も与えてしまう．これが何を意味しているのかを的確に理解するためには，相対論的場の量子論にもとづかなければならない．

波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ は単なる関数ではなく，電磁場などと同様に空間の各点 $\vec{x}$ に備わっている運動の自由度，すなわち場の力学量である．あらゆる粒子には，それぞれに付随して場が存在している．クライン・ゴルドン方程式やディラック方程式はそれらの場の運動を決定する運動方程式である．その解として，場は正のエネルギーの振動モードと負のエネルギーの振動モードを備えている．正エネルギーの振動モードが励起された状態が，粒子の運動状態を実現しており，その運動の様子は正エネルギーの波動関数 (1.33) で表される．

(1.47) の ψ の負のエネルギー解は，場 ψ の複素共役を改めて場 $\psi^c \equiv \psi^*$ とみなすと，ψ^c についての正エネルギー解になる．場 ψ についてクライン・ゴルドン方程式 (1.34) が成り立っているときは，ψ^c についても全く同じ方程式が成り立つ．ディラック方程式の場合も同様で，8.3 節で示すように，ψ^* に 4 行 4 列の定数行列 $C\gamma^{0T}$ をかけた $\psi^c \equiv C\gamma^{0T}\psi^*$ は，ψ と同じディラック方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi^c(t, \vec{x}) = 0 \tag{1.49}$$

を満たす．波動関数が場の力学量であるのなら，ψ と ψ^c のどちらが根元的であるとはいえない．両者ともに同等の立場にある．ψ の負のエネルギーの振動モードの存在は ψ^c の正のエネルギーの振動モードの存在を意味しており，そのモードの励起はそれに対応した粒子の存在を意味する．ψ と ψ^c は同じ運動方程式に従っているのだから，それぞれの正エネルギーモードが表す粒子は同じ質量をもっている．8.3 節で明らかになるが，粒子が電荷などの加算的な量子数をもっている場合，それらの量子数は両者の粒子の間で逆符合となる．

このように，素粒子の世界を記述する相対論的場の量子論に従うと，すべての素粒子にはそれと全く等しい質量をもち，電荷やその他の量子数が逆符合で大きさが等しい素粒子が存在する．それらは反粒子と呼ばれる．負の電荷をもった電子 e^- に対して，正の電荷の陽電子 e^+，陽子 p に対して反陽子 $\bar{\mathrm{p}}$，電荷が 0 の中性子 n にもその反粒子として反中性子 $\bar{\mathrm{n}}$，ニュートリノ ν に対して反ニュートリノ $\bar{\nu}$，等々．もちろん，クォーク u, d にも反粒子として，反クォーク $\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{d}}$ が存在する．電荷が 0 の素粒子の中には，反粒子が粒子と等しいものも

ある．光子 γ や π^0 メソンなどがそうであるが，それらは真性中性粒子と呼ばれる．これらの粒子を表す場は実数場すなわち $\psi = \psi^*$ の条件が課せられた場である．

1.7 電気力学

素粒子の基本的な力のうち電磁力はマクロの世界の力学にも現れている．ここでその運動法則をまとめておく．電場 $\vec{E}(t, \vec{x})$ および磁場 $\vec{B}(t, \vec{x})$ は4組のマックスウェル方程式に従う．ヘビサイド・ローレンツの有理化単位系を用いると，最初の2組は

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \ , \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = 0 \tag{1.50}$$

である．ベクトル解析の定理により，発散のないベクトル場 $\vec{B}(t, \vec{x})$ はベクトルポテンシャル $\vec{A}(t, \vec{x})$ を用いて $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ と表すことができる．これを第2式のファラデーの法則に代入すると $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = 0$ となる．回転のないベクトル場はスカラーポテンシャル $A^0(t, \vec{x})$ により $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\vec{\nabla}A^0$ と表すことができる．したがって，電場 $\vec{E}$ および磁場 $\vec{B}$ は4元電磁ポテンシャル $A^\mu = (A^0, \vec{A})$ により

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}A^0 - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} \tag{1.51}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.52}$$

と表される．

電気力学の運動法則は次のように言い表すことができる．電磁場がないときに粒子のエネルギー E が，運動量 $\vec{p}$ と座標 $\vec{x}$ で

$$E = E(\vec{p}\ , \ \vec{x}) \tag{1.53}$$

と表されているとき，電磁場のもとでのエネルギー E は，(1.53) の E と $\vec{p}$ を

$$E \longrightarrow E - qA^0(t, \vec{x}) \ , \quad \vec{p} \longrightarrow \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t, \vec{x}) \tag{1.54}$$

と置き換えることにより

$$E = E\left(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t, \vec{x})\ , \ \vec{x}\right) + qA^0(t, \vec{x}) \tag{1.55}$$

と定まる．ここに q は粒子の電荷，$\vec{P}$ は正準運動量である．

エネルギ (1.53) として自由粒子のエネルギー (1.14) を適用し，正準理論の方法に従って粒子の運動量 $\vec{p}$ の時間変化を求めると，電気力学の基礎方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B} \tag{1.56}$$

が導かれる（自習問題 [7] 参照）．

量子力学に進もう．(1.27) で座標微分が表す運動量演算子は，正確にいうと座標との間で正準交換関係 $[x^i, -i\hbar\nabla^j] = i\hbar\delta^{ij}$ を満たす正準運動量 P^i である．したがって，置き換え操作 (1.54) は量子力学では

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qA^0(t,\vec{x}) \ , \quad -i\hbar\vec{\nabla} \longrightarrow -i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}(t,\vec{x}) \tag{1.57}$$

すなわち

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{q}{c}A_\mu \tag{1.58}$$

である．量子力学の運動方程式の中に現れる微分演算 (1.28) を (1.58) で置き換えることによって電磁場中の運動方程式が定まる．

マックスウェル方程式の残りの 2 組の式は，電荷密度 $\rho(t,\vec{x})$ および電流密度 $\vec{j}(t,\vec{x})$ のもとでのクーロンの法則およびアンペールの法則

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \ , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \frac{1}{c}\vec{j} \tag{1.59}$$

である．$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = 0$ に注意すると ρ と $\vec{j}$ が連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{1.60}$$

を満たさねばならないことがわかる．この式は電荷

$$Q(t) = \int d^3\vec{x} \ \rho(t,\vec{x}) \tag{1.61}$$

が保存量であり

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \int d^3\vec{x} \ \frac{\partial\rho(t,\vec{x})}{\partial t} = -\int d^3\vec{x} \ \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = -\int d\vec{S}\cdot\vec{j}(t,\vec{x}) = 0 \tag{1.62}$$

を意味している．

(1.59) の方程式の内容は第 6 章で詳細に調べることになる．

自習問題

[1] 座標系 $\mathrm{K}[x^\mu]$ で4元ベクトルの各成分が A^μ, A_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ のとき，別の座標系 $\mathrm{K}'[x'^\mu]$ での成分はローレンツ変換

$$A'^\mu = L^\mu{}_\nu A^\nu \ , \quad A'_\mu = L_\mu{}^\nu A_\nu \tag{1.63}$$

で結び付いている．$A_\mu A^\mu$ が不変量であることから，変換行列 $L^\mu{}_\nu, L_\mu{}^\nu$ が

$$L_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}L^\rho{}_\sigma \ , \quad L_\mu{}^\rho L^\mu{}_\sigma = \delta^\rho_\sigma \ , \quad L^\mu{}_\rho L_\mu{}^\sigma = \delta^\sigma_\rho \tag{1.64}$$

を満たすことを確かめよ．

[2] ローレンツ変換 (1.63) に伴い座標系を $x'^\mu = L^\mu{}_\nu x^\nu$ と変換したとき，座標微分 $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$ が $\partial'_\mu \equiv \partial/\partial x'^\mu = L_\mu{}^\nu \partial_\nu$ と変換することを確かめよ．

[3] ψ がディラック方程式 (1.39) を満たすとき，クライン・ゴルドン方程式 (1.34) も満たされることを，$(i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu + mc)(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)\psi = 0$ に γ^μ の反交換関係 (1.41) を適用することによって確かめよ．

[4] ディラック方程式 (1.35) のハミルトニアン H (1.37) が全角運動量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ と交換すること，すなわち $\vec{J}$ が保存量であることを確かめよ．

[5] スピン $s = 1/2$ の粒子において (1.45) のヘリシティ h がディラックのハミルトニアン $H = c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta$ と可換であり，

$$Hu_{E\lambda} = Eu_{E\lambda} \ , \ hu_{E\lambda} = \lambda\hbar u_{E\lambda} \tag{1.65}$$

を満たす同時固有状態 $u_{E\lambda}$ が存在すること，またそれらの固有値が $E = \pm c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^{\,2}}$，$\lambda = \pm 1/2$ であることを確かめよ．

[6] ローレンツ変換 (1.63) のもとでスピン 1/2 の粒子の波動関数 $\psi(t, \vec{x})$ は

$$\psi'(t', \vec{x}') = S_L\psi(t, \vec{x}) \tag{1.66}$$

と変換される．S_L は

$$S_L^{-1}\gamma^\mu S_L = L^\mu{}_\nu\gamma^\nu \tag{1.67}$$

を満たす 4 行 4 列の行列である．$\psi(t,\vec{x})$ がディラック方程式 (1.39) を満たすとき，$\psi'(t',\vec{x}')$ がプライム系のディラック方程式 $(i\hbar\gamma^\mu\partial'_\mu - mc)\psi'(t',\vec{x}') = 0$ を満たすことを確かめよ．

[7] 電磁場中の粒子のエネルギーは自由粒子のエネルギー (1.14) を用いて $E(\vec{P},\vec{x}) = E(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}(t,\vec{x})) + qA^0(t,\vec{x})$ で与えられる．$\vec{x}$ の正準運動方程式 $d\vec{x}/dt = \partial E(\vec{P},\vec{x})/\partial\vec{P}$ により，$\vec{p} \equiv \vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A}$ が粒子の力学的運動量 (1.11) であることを確かめよ ((1.15) に注目すること)．また，$\vec{P}$ の正準運動方程式 $d\vec{P}/dt = -\partial E(\vec{P},\vec{x})/\partial\vec{x}$，および，微分の等式 $dA^i/dt = \partial A^i/\partial t + \sum_{j=1}^3 (dx^j/dt)\partial A^i/\partial x^j$ を用いて，$\vec{p}$ の時間変化

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}p^i &= -\frac{q}{c}\left(\frac{\partial A^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{dx^j}{dt}\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right) - q\frac{\partial A^0}{\partial x^i} + \frac{q}{c}\sum_{j=1}^3 \frac{\partial E(\vec{P} - \frac{q}{c}\vec{A})}{\partial P^j}\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\ &= q\left(-\frac{\partial A^0}{\partial x^i} - \frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}\right) + \frac{q}{c}\sum_{j=1}^3 \frac{dx^j}{dt}\left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right) \qquad (1.68)\end{aligned}$$

を導け．(1.51),(1.52) およびベクトル 3 重積の公式 $(\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}))^i = \sum_{j=1}^3 (v^j\nabla^i A^j - v^j\nabla^j A^i)$ により，(1.68) が電気力学の基本方程式 (1.56) を正しく実現していることを確かめよ．

コラム：ディラックの空孔理論

ディラックは電子のシュレディンガー方程式を相対論的に拡張する試みを通して，ディラック方程式を導いたが，この方程式は1.6節で見たように，正のエネルギー状態に加えて，物理的状態としては受け入れがたい負のエネルギーの状態も解としてゆるしてしまう．このような量子状態がゆるされると，正エネルギーの状態の電子も電磁遷移を通して底無しの負のエネルギー状態に際限無く落ち込んでいくことになり，理論的困難におちいる．ディラックはこの困難を回避する妙案を考え出した．「電子が何もない真空」は，本当は無限個の電子によって負のエネルギー準位がすべて満たされた状態である．電子が1個存在している状態は，無限個の負のエネルギーの電子に加えて，正のエネルギー準位に1個電子がいる状態である．電子はフェルミ・ディラック統計に従うので，この正のエネルギーの電子は負のエネルギー準位に遷移しようとしても，すでにその準位が負のエネルギーの電子によってすべて満たされているので，パウリの排他原理により遷移は禁止され，安定な状態となる．

真空がこのようなものであると考えるとすると，負のエネルギー準位が完全には満たされていない状態もありうるが，それはどう考えればよいのか．たとえば，運動量が$\vec{p}$で負のエネルギー$E=-E_p=-c\sqrt{m^2c^2+\vec{p}^2}$の準位の電子が1個足りない状態を考えてみる．この状態はすべての準位が満たされた真空を基準として比較すると，運動量は$-\vec{p}$，エネルギーは正の値E_pをもった状態となる．これらの運動量とエネルギーの間には，質量mの粒子のアインシュタインの関係式が成り立っている．さらに，この状態の電荷は，真空より不足している1個の電子の電荷$-e$だけ少ないのだから，$+e$の電荷をもっている．したがって，この状態は電子と同じ質量mをもち，電荷が逆符号の「粒子」が正のエネルギーをもって運動している状態だと結論せざるをえない．

このようにして，ディラック方程式から，電子の反粒子として陽電子の存在が理論的に予言された．

CHAPTER 2

基本構成子と力

ミクロの世界を構成しているクォークやレプトンとは一体どのような粒子なのか，またそれらにはどのような力がはたらいているのであろうか．この章ではクォークやレプトンにはたらく力の大まかな性質を概観しよう．

2.1 原子，原子核

原子は，およそ10^{-10} mの大きさをもっている．この大きさは，原子核の周りを取り巻いている電子の拡がりで決まっている．その典型的な値は水素原子の基底状態の「平均半径」a_0で，ボーア半径と呼ばれる．それは電子の質量

$$m_{\mathrm{e}} = 0.51100\ \mathrm{MeV}/c^2, \quad (\ 1\ \mathrm{MeV} = 10^6\ \mathrm{eV}\ ) \tag{2.1}$$

光速cおよびプランク定数$\hbar$を組み合わせて作った長さの次元をもった量$\hbar/m_{\mathrm{e}}c = 3.8616 \times 10^{-13}$ m（これは電子のコンプトン波長と呼ばれる）を，電子と原子核を結び付けているクーロン力の強さを表す微細構造定数αで割算した

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_{\mathrm{e}}c\alpha} = 0.529 \times 10^{-10}\ \mathrm{m} \tag{2.2}$$

で与えられる．微細構造定数は素電荷（電子の電荷の絶対値）eにより

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} = \frac{1}{137.036} \tag{2.3}$$

で与えられる無次元量である．

本書では今後，粒子の電荷は素電荷eを単位とした数値で表す．

原子核の大きさは，大体$10^{-15} \sim 10^{-14}$ mであり，それは陽子pと中性子nが集まってできている．陽子pは＋1の電荷を帯びているのに対し，中性子nは電気的に中性であるので，pとnは電磁気的性質が全く異なるが，それ以外の多くの点において大変似かよった性質をもっている．それらはともにスピンが1/2のフェルミオンであり，それらの質量m_{p}とm_{n}は

$$m_{\mathrm{p}} = 938.27\ \mathrm{MeV}/c^2, \quad m_{\mathrm{n}} = 939.57\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{2.4}$$

と，極めて近い値をもつ．原子核を構成する要素であるこれらは，ひとまとめにして核子と呼ばれる．これらの核子の間にどのような力がはたらいて，原子核が構成されるのかを解明するのは原子核物理学である．

核子の間に力を及ぼし原子核を構成する力は核力と呼ばれる．原子核の質量は，その中に含まれる核子の質量の総和よりわずかに小さい．この差額は，核内において核子の間にはたらく核力によって生じる結合エネルギーである．陽子と中性子が1個ずつ集まった重陽子Dの質量は$m_{\mathrm{D}} = 1875.61\ \mathrm{MeV}/c^2$であり，差額$(m_{\mathrm{p}} + m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{D}})c^2 = 2.2$ MeVが結合エネルギーである．ヘリウムHeは陽子と中性子をそれぞれ2個ずつ含むが，その質量は3727.38 MeV/c^2，結合エネルギーは28.30 MeVである．原子核は核力の効果によって，核内の核子の組み替えを通して核分裂や核融合等の多彩な原子核反応を起すが，そこに現れるエネルギーは数MeVから数十MeV程度である．

2.2　核子と強い力

電子はこれまでのところ，点粒子とみなすことができる．それに大きさがあるとしてもそれは10^{-18} m以下であることが実験的にわかっている．一方，陽子や中性子等，原子核を構成している核子は，点粒子ではなく10^{-15} m程度の大きさの内部構造をもった，拡がった「粒子」であることがいろいろな実験からわかっている．たとえば，陽子に電子を衝突させ，散乱された電子の散乱角分布の実験データから，陽子の中で電荷がどのように分布しているか等についての詳細な情報も得られている．

核子が内部構造をもっており，その大きさ$(\sim 10^{-15}$ m$)$が原子核の大きさ$(10^{-15} \sim 10^{-14}$ m$)$とそれほど変わらないのは，核子を形作るのにはたらく力

と核子同士を引き付けて原子核を構成するのに効く核力がともに同じ起源に由来しているためである．この力は強い力あるいは強い相互作用と呼ばれる．

強い相互作用の力がどれくらい「強い」のかを電磁相互作用の強さと比較してみよう．電磁相互作用が中心的な役割を果たすのは，化学反応である．化学反応は原子の表面近くの電子の組み替えを通して起っており，そこで生じるエネルギーは，乾電池の電圧が1.5Vであるように，およそ数eVである．これは電磁相互作用の強さを表す微細構造定数 $\alpha \simeq 1/137$ の2乗と，反応に関与する電子の質量 m_{e} の積

$$m_{\mathrm{e}}c^2\alpha^2 = 27\ \mathrm{eV} \tag{2.5}$$

が基本的な単位となって生じている．たとえば水素原子のエネルギー準位は n を正の整数（主量子数）として

$$E_n = -\frac{m_{\mathrm{e}}c^2\alpha^2}{2n^2} \tag{2.6}$$

である．強い相互作用によって生じる原子核エネルギーは1反応当り数MeVから数十MeV程度である．反応に関与するのは核子であるから，化学反応の場合から類推して(2.5)に対応する式を書くと

$$m_{\mathrm{p}}c^2\alpha_s^2 = (\text{数十} \sim \text{数百})\,\mathrm{MeV} \tag{2.7}$$

となる．ここに α_s は強い相互作用の強さを表す何らかの無次元量である．その値として

$$0.1 \leq \alpha_s \leq 1 \tag{2.8}$$

が得られる．α_s が具体的に何を表現しているのかはこの議論では明らかでないが，強い相互作用が電磁相互作用に比べるとかなり「強い」ことがうかがえる．

電磁相互作用を媒介するのは電磁場である．古典電磁気学によると，2個の荷電粒子の間にはたらく電磁気力は，一方の粒子がその周りに電磁場を作り出し，その電磁場によってもう一方の粒子に力がはたらくと理解される．量子電気力学によると電磁気的な作用は，電磁場の粒子である光子の運動を通して伝わる．光子はスピン1で，質量が0のボソンである．電荷をもった粒子はその電荷の大きさに比例して光子を吸収したり，あるいは新たに作り出したりする能力をもっている．一方の粒子が作り出した光子が他方の粒子のところまで飛

んで行き，そこで吸収されることにより，2つの粒子の間に力学的作用が生じる．電気・磁気的力は量子論的にはこのような過程を通して生じている．

強い相互作用も，電磁相互作用と同様で，その力の場に付随した粒子の運動を通して生じている．この粒子はグルーオンと呼ばれる．陽子や中性子など，核子はグルーオンの力によって形作られている．その構成粒子はクォークと呼ばれるスピンが1/2のフェルミオンである．3個のクォークがグルーオンの力によって結び付いて核子はできている．陽子はuクォーク2個とdクォーク1個でできており，中性子はuクォーク1個とdクォーク2個でできている（図2.1）．uクォークは電荷2/3を，dクォークは電荷 −1/3を帯びており，この電荷の違いにより，陽子は電荷が $2/3 + 2/3 - 1/3 = 1$，中性子は $2/3 - 1/3 - 1/3 = 0$ となっている．

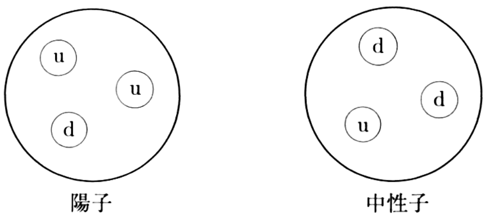


図2.1　陽子・中性子の構造

グルーオンはクォーク3個の間に引力を及ぼして核子を作るが，またクォークと反クォークの間にも引力を及ぼして束縛状態を作る．代表的なものは電荷 ±1をもった荷電 $\pi^{\pm}$ メソンで，図2.2のように π^{+} はuクォーク1個とdクォークの反粒子 $\bar{\mathrm{d}}$ 1個から，π^{-} はdクォーク1個とuクォークの反粒子 $\bar{\mathrm{u}}$ 1個からできている．$\pi^{\pm}$ メソンはスピンが0のボソンで，その質量は

$$m_{\pi^{\pm}} = 139.570\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{2.9}$$

である．

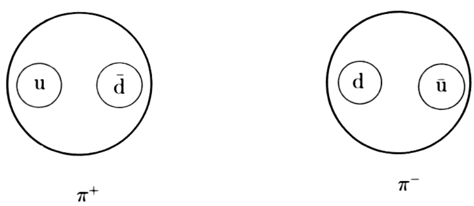


図2.2　π メソンの構造

クォークは核子を構成する基本構成子であるが，不思議なことには，クォークそれ自体は単独では真空中を自由に飛び回ることはない．2/3 や $-1/3$ という分数電荷を帯びた粒子は観測されていない．実験的に観測されている粒子は整数電荷を帯びたものだけである．それらはクォーク 3 個のフェルミオン系あるいはクォークと反クォーク 1 個ずつで構成されたボソン系のいずれかである．前者はバリオン，後者はメソンと呼ばれ，また，これらをすべて合せて，強い相互作用によって構成されている粒子群は総称してハドロンと呼ばれる．

電子やニュートリノ等，レプトンは真空中を単独で自由に飛び回れるが，クォークは単独で存在することがゆるされない．また，グルーオンも単独では真空中を自由に飛び回ることはできない．グルーオンが媒介する強い相互作用は，光子によって媒介される電磁相互作用とは大変異なった力学的特性を備えている．

2.3 クォーク・レプトンの種類

自然界に存在するクォークやレプトンとしては，現在までのところ，表 2.1 のようにそれぞれ 6 種類（およびそれらの反粒子）が確認されている．これらはクォークやレプトンのフレーバー（香り）と呼ばれる．ここに，第 1 から第 3 まで世代分けしているのは，存在が確認された順で，大体質量の軽い順だが，ニュートリノについてはまだ質量の上限がわかっているだけである．

電子 e^-，ミューオン μ^- およびタウレプトン τ^- の質量はそれぞれ

$$m_\mathrm{e} = 0.5109989\ \mathrm{MeV}/c^2, \tag{2.10}$$

$$m_\mu = 105.65837\ \mathrm{MeV}/c^2, \tag{2.11}$$

表 2.1 クォーク・レプトンの種類

	クォーク		レプトン	
電荷	2/3	$-1/3$	0	-1
第 1 世代	u	d	ν_e	e^-
第 2 世代	c	s	ν_μ	μ^-
第 3 世代	t	b	ν_τ	τ^-

$$m_\tau = 1777\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{2.12}$$

である．ニュートリノがどれくらいの質量をもっているのかを実験的に明らかにすることは，現代素粒子物理学の重要課題となっている．これまでのところ直接測定によるそれらの上限として

$$m_{\nu_e} < 2\ \mathrm{eV}/c^2, \tag{2.13}$$

$$m_{\nu_\mu} < 0.19\ \mathrm{MeV}/c^2, \tag{2.14}$$

$$m_{\nu_\tau} < 18\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{2.15}$$

が得られているが，間接的にはほんのわずかであるがそれらが有限の質量をもっているらしいことが最近明らかになってきている．

クォークの質量を議論するには注意を要する．真空中を自由に飛び回ることのできる粒子については，そのエネルギーと運動量の間にアインシュタインの関係式 (1.13) が成り立つので，それらの質量は不定性なしに決定することができる．しかし，クォークはグルーオンの力を受けてハドロンの中に閉じ込められた状態でしか存在しないので，この関係式をもとにしてクォークの質量を決定することはできない．クォークの質量は何らかの約束にもとづいて定義されることになり，いろいろな約束にもとづいた幾種類もの質量が用いられる．それらの中で一番厳密な定義は，相対論的場の量子論にもとづき，グルーオン場と相互作用しているクォークの場の運動方程式の中に現れる質量パラメターである（これだけでも本当は一意的には定まらないのであるが，その詳細にはここでは深入りしないことにする）．その観測結果はおよそ以下のとおりである．

$$m_\mathrm{u} \simeq 3\ \mathrm{MeV}/c^2, \qquad m_\mathrm{d} \simeq 5\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{2.16}$$

$$m_\mathrm{c} \simeq 1.3\ \mathrm{GeV}/c^2, \qquad m_\mathrm{s} \simeq 100\ \mathrm{MeV}/c^2 \tag{2.17}$$

$$m_\mathrm{t} \simeq 172\ \mathrm{GeV}/c^2, \qquad m_\mathrm{b} \simeq 4\ \mathrm{GeV}/c^2 \tag{2.18}$$

ここに，$1\ \mathrm{GeV} = 10^3\ \mathrm{MeV} = 10^9\ \mathrm{eV}$ である．

日常の身の回りの物質は第1世代のクォーク u, d とレプトン e^- によって構成されている．第2世代と第3世代のクォークやレプトンは，高エネルギー加速器による衝突実験によって作り出すことができる．また，宇宙を飛び回っている高エネルギーの宇宙線粒子（大部分は陽子）が地球表面近くで大気の

原子核と衝突反応を起した際にも生成されている．もちろん，クォークはハドロンの状態として観測されるわけであるが，6 種類のクォーク・フレーバーの組合せによって多種多様なバリオンやメソンが現れる．比較的軽い u, d, s クォークまで含んだハドロンの代表例として，スピンが 1/2 の陽子や中性子の仲間のバリオン，および，スピンが 0 の π メソンの仲間のリストを表 2.2, 表 2.3 に与える．質量の単位は MeV/c^2 である．Λ^0 と Σ^0 は同じクォーク組成をもっているが，内部構造が微妙に異なっている．また，真性中性のメソンである π^0 ，η ，η' は 3 種のクォーク・反クォークの状態 $\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}$ ，$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}$ ，$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{s}$ の重ね合わせとして実現されている．

表 2.2　バリオンの仲間

	質量	構成クォーク
p	938.3	u u d
n	939.6	u d d
Λ^0	1115.7	u d s
Σ^+	1189.4	u u s
Σ^0	1192.6	u d s
Σ^-	1197.4	d d s
Ξ^0	1314.9	u s s
Ξ^-	1321.7	d s s

表 2.3　メソンの仲間

	質量	構成クォーク
π^0	135.0	$\bar{\mathrm{u}}$ u ，$\bar{\mathrm{d}}$ d
π^+	139.6	$\bar{\mathrm{d}}$ u
π^-	139.6	$\bar{\mathrm{u}}$ d
K^+	493.7	$\bar{\mathrm{s}}$ u
K^-	493.7	$\bar{\mathrm{u}}$ s
K^0	497.6	$\bar{\mathrm{s}}$ d
$\bar{\mathrm{K}}^0$	497.6	$\bar{\mathrm{d}}$ s
η	547.9	$\bar{\mathrm{u}}$ u ，$\bar{\mathrm{d}}$ d ，$\bar{\mathrm{s}}$ s
η'	957.8	$\bar{\mathrm{u}}$ u ，$\bar{\mathrm{d}}$ d ，$\bar{\mathrm{s}}$ s

電子は自然界で電荷をもった一番軽い粒子である．したがって，電荷の保存則のため，電子はそれより軽い粒子に崩壊することはなく，絶対的に安定な粒子である．ミューオンは 2.19703×10^{-6} sec の寿命で，ほとんど

$$\mu^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \tag{2.19}$$

の崩壊を起す．タウレプトンの寿命はもっと短く 0.291×10^{-12} sec である．質量が大きい分，これはいろいろな崩壊のモードがゆるされる．

$$\tau^- \to \nu_\tau + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}\ ,\quad \tau^- \to \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu\ ,\quad \tau^- \to \nu_\tau + \mathrm{d} + \bar{\mathrm{u}} \tag{2.20}$$

μ^- や τ^- が崩壊するのと同様に，重たいクォークも軽いクォークへと崩壊する．たとえば中性子は単独で真空中にいると，886 sec の寿命で β 崩壊

$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ を起すが，これは中性子の中の 1 個の d クォークの崩壊

$$d \to u + e^- + \bar{\nu}_e \tag{2.21}$$

によって起っている．荷電 π メソンは 2.603×10^{-8} sec の寿命でほとんど 100% $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ に崩壊する．これは次の反応

$$d + \bar{u} \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{2.22}$$

によって，π^- を構成している d クォークと $\bar{u}$ 反クォークが対消滅を起して消え去り，そのエネルギーと電荷を引き継ぐように μ^- と $\bar{\nu}_\mu$ が生成されているのである．s クォークを含んだハドロンの崩壊の例として Σ^- を見よう．その寿命は 1.479×10^{-10} sec で，ほぼ 100% $\Sigma^- \to n + \pi^-$ に崩壊する．これは s クォークが

$$s \to u + d + \bar{u} \tag{2.23}$$

と崩壊することによって $\Sigma^-(dds) \to (ddu\ d\bar{u}) = n + \pi^-$ となっている．表 2.2 のバリオンの中で $\Lambda^0, \Sigma^\pm, \Xi^0, \Xi^-$ は，すべて同様の機構で崩壊し，それらの寿命はともにおよそ 10^{-10} sec である．

レプトンやハドロンの崩壊を引き起こす反応 (2.19)〜(2.23) は「弱い相互作用」と呼ばれるとても弱い力によって起っている．その結果，それらの崩壊はとても起りにくい．表 2.2 中，Σ^0 だけは，電磁相互作用によって光子を 1 個放出することにより，同じクォーク組成の Λ^0 に $\Sigma^0 \to \Lambda^0 + \gamma$ と崩壊する．Σ^0 の寿命は 7.4×10^{-20} sec である．弱い相互作用によってしか崩壊できない $\Lambda^0, \Sigma^\pm, \Xi^0, \Xi^-$ は，電磁相互作用で崩壊する Σ^0 と比べると 10^9 倍も長寿なのである．

弱い力を媒介するのは $W^\pm$ と Z^0 と呼ばれるスピンが 1 の粒子達である．グルーオンや光子は質量が 0 であるのに対し，$W^\pm$ や Z^0 は大変重たく，それらの質量は

$$m_W = 80.4\ \mathrm{GeV/c^2}, \qquad m_Z = 91.19\ \mathrm{GeV/c^2} \tag{2.24}$$

もある．3.4 節で明らかになるが，クォークやレプトンは，自分よりはるかに重たい $W^\pm$ を，エネルギーと時間の不確定性関係でゆるされるわずかの時間の間に生成・交換して崩壊している．その結果，崩壊の確率はとても小さくなっている．

2.4 クォークの色

レプトンは真空中を自由に飛び回れるのに，クォークはグルーオンの強い力によってハドロンの中に閉じ込められている．この背後には，クォークがレプトンにはない特別の属性を備えていることがかくされている．

クォークには，各フレーバーごとに3種類の状態が存在している．たとえば u クォークは，u^1，u^2，および u^3 の3種の状態がある．この3種の状態は色の3原色（赤，青，緑）になぞらえて「色」（カラー）の自由度と呼ばれる．反クォークもやはり3種の色の自由度をもち，$\bar{u}_1$，$\bar{u}_2$，$\bar{u}_3$ のように表す．ここで添字を下付きで付けているのは，上付き添字で表したクォークの色と「反対」の色であることを明確に表すためである．レプトンには色の自由度は無く，各フレーバーごとに1種類のみである．グルーオンは色をもった粒子に相互作用を及ぼし，粒子の色の状態をいろいろと変化させる．このときクォークのフレーバーは変化しない．また，グルーオン自体も色をもっている．i 番目の色のクォーク u がグルーオン g を放出して j 番目の色の状態に変化する過程を考えてみよう．

$$u^i \to u^j + g^i{}_j \tag{2.25}$$

この過程の前と後のクォークの色の自由度はそれぞれ3種だから，放出されるグルーオンの色の組合せは $3 \times 3 = 9$ となる．このうち $g^i{}_j \propto \delta^i_j$ の1種は色を全く変化させないので勘定からはずされて，グルーオンは全部で8種類の色の自由度をもつ．この8種類のグルーオンが色をもった粒子に力を及ぼしている．上の式でグルーオンの色の添字の i と j のうち j を反クォークの場合のように下付きで表しているのは，この反応過程で色が保存されることを明確に表すためである．右辺のクォークの色 j とグルーオンの色の下付き成分 j が打ち消しあって，全体として上付きの i だけとなり，左辺のクォークの色 i と一致する．

個々のクォークは当然グルーオンの力を受けるが，クォークが3個集まりそれぞれが「3原色」をうまく分け担うと，全体としては「無色」になることができる．またクォークと反クォーク1個ずつの系でも色が打ち消しあって「無色」になれる．「無色」になった状態はもはやそれ以上グルーオンの吸収・放出は起さなくなり，安定な状態として存在できる．バリオンやメソンはこのよ

うにして「無色」の状態として実現されている．

この状況を数式を使って正確に記述しよう．クォークには3種類の色の状態があるといったが，それらは量子力学的状態であるから，状態の重ね合わせも起る．重要なことは，色の状態の基底として3個の互いに直交した独立な状態が存在することであり，その3個の基底の採用の仕方には当然任意性がある．ある基底で赤だとしたクォークも，別の基底で表すと3色の状態の重ね合わせの状態で表される．すなわち，基底の取り替えでクォークの色の状態は

$$\mathrm{u}^i \longrightarrow \sum_{j=1}^{3} U^i{}_j \mathrm{u}^j \equiv (U\mathrm{u})^i \tag{2.26}$$

に変わる．ここに $U^i{}_j$ は3行3列のユニタリー行列である．

この色の基底の変換行列 U はユニタリー行列だから $U^\dagger = U^{-1}$ すなわち

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \ ,（I \text{は3行3列の単位行列}） \tag{2.27}$$

を満たすが，この条件だけであれば単位行列に比例した単なる位相変換 $U = e^{i\varphi}I$ も含まれる．そのような変換は $\mathrm{u}^1, \mathrm{u}^2, \mathrm{u}^3$ に共通の位相 $e^{i\varphi}$ をかけるだけであり，本当に色の基底を変えたことにはならない．この無意味な変換を含まない真に意味のある変換 U は (2.27) に加えて

$$\det U = 1 \tag{2.28}$$

を満たした変換である．

反クォークはクォークと複素共役の関係にあるので，その色の状態は (2.26) の基底の取り替えで

$$\bar{\mathrm{u}}_i \longrightarrow \sum_{j=1}^{3} U^i{}_j{}^* \bar{\mathrm{u}}_j = \sum_{j=1}^{3} \bar{\mathrm{u}}_j U^{\dagger j}{}_i \equiv (\bar{\mathrm{u}}U^\dagger)_i \tag{2.29}$$

に変わる．u と $\bar{\mathrm{u}}$ だけでなく，すべてのクォークと反クォークはそれぞれ (2.26) および (2.29) と同じ変換を受ける．

色の基底の取り替えで変化する状態は色を持っている．無色の状態は基底をどう変えても変化しない状態である．メソンはクォークと反クォーク1個ずつの複合系であるが，それらの色について重ね合わせた状態

$$\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d} \equiv \sum_{i=1}^{3} \bar{\mathrm{u}}_i \mathrm{d}^i \tag{2.30}$$

を作ると，これは行列 U のユニタリー性 (2.27) のために変換 (2.26),(2.29) のもとで

$$\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d} \longrightarrow \bar{\mathrm{u}}U^\dagger U\mathrm{d} = \bar{\mathrm{u}}\mathrm{d} \tag{2.31}$$

すなわち無色な状態となる．

バリオンは3個のクォークで構成された複合系である．それぞれのクォークの色の添字を完全反対称テンソル ϵ_{ijk} ($\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{213} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{132} = 1$, ほかは0) で縮約した状態を作ると，それは (2.26) の変換のもとで

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\mathrm{u}^i\mathrm{u}^j\mathrm{d}^k \longrightarrow \sum_{i',j',k'=1}^{3}\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}U^i{}_{i'}U^j{}_{j'}U^k{}_{k'}\mathrm{u}^{i'}\mathrm{u}^{j'}\mathrm{d}^{k'} \tag{2.32}$$

となる．変換係数

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}U^i{}_{i'}U^j{}_{j'}U^k{}_{k'} \tag{2.33}$$

は添字 i', j', k' について完全反対称になっているので，この和は $\epsilon_{i'j'k'}$ に比例する．その比例係数は行列式の定義により

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}U^i{}_1U^j{}_2U^k{}_3 \;=\; \det U \tag{2.34}$$

である．したがって変換式 (2.32) は

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\mathrm{u}^i\mathrm{u}^j\mathrm{d}^k \longrightarrow \det\, U \sum_{i',j',k'=1}^{3} \epsilon_{i'j'k'}\mathrm{u}^{i'}\mathrm{u}^{j'}\mathrm{d}^{k'} \tag{2.35}$$

となるが，(2.28) の条件が課されているので，この状態は変換 (2.26) のもとで不変，すなわち無色な状態である．クォーク2個の系は色をどう組み合わせても無色にすることはできない．このようにしてメソンやバリオンの状態は (2.27) と (2.28) を満たす色の変換 (2.26), (2.29) のもとで不変な状態として実現されている．

色をもった粒子は単独では存在しえない．これは，電荷をもった電子が単独で自由に真空中を運動できるのと対照的である．電子と陽電子1個ずつが静止している系を考えてみよう．その相対距離を r とするとこれらの間にはクーロン力がはたらき，図2.3のようなポテンシャルエネルギー

$$V_{\text{クーロン}} = -\frac{e^2}{4\pi r} \tag{2.36}$$

が存在する．r を大きくしていくとポテンシャルエネルギーは徐々に増大していくが，$r \to \infty$ の極限でも $V_{クーロン} \to 0$ となるだけで，それ以上大きな（正の）値にはならない．これは有限のエネルギーを加えることによって，電子と陽電子を引き離すことができること，すなわちそれぞれの粒子は単独で自由に運動できることを意味している．

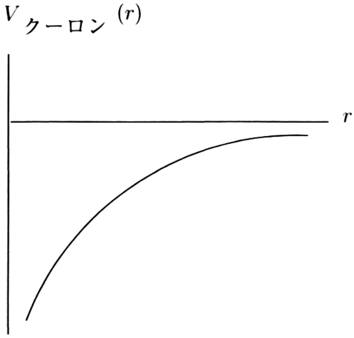


図2.3　クーロンポテンシャル

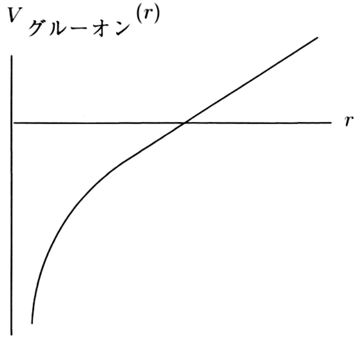


図2.4　グルーオンポテンシャル

クォークと反クォークの2体系にもグルーオンの力によるポテンシャルエネルギー $V_{グルーオン}$ が存在する．相対距離 r が小さいときは，その振舞いはクーロンポテンシャルとほぼ同じ $(\propto 1/r)$ であるが，$r \sim 10^{-15}$ m のあたりから振舞いが変わり，図2.4のように r とともに増大 $(\propto r)$ するようになる．したがって，$r \to \infty$ にしようとすると無限のエネルギーが必要となる．実際には，クォークと反クォークを引き離そうとすると，図2.5のように，ある時点で新たなクォーク・反クォーク対が量子効果によって生成され，それぞれがもとの反クォークおよびクォークと束縛状態を形成し2組の「無色」で独立なメソンの系になってしまい，ポテンシャルエネルギーの増大は止まる．グルーオンが

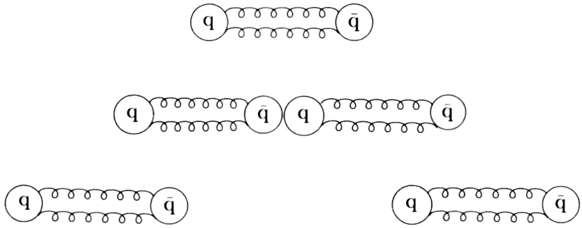


図2.5　$\bar{q}q$ の対生成

媒介する強い力がこのような特異な性質を示す背後には，それを支配する力学の特殊性が関わっている．その力学は量子色力学と呼ばれている．

自習問題

[1] 静止している π^- が $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の崩壊を起したとき，μ^- の速度は光速 c の何倍になるか，$m_\nu = 0$ として有効数字3桁で求めよ．

コラム：クォークの質量

陽子や中性子は u, d クォーク3個からできているのだから，素朴に考えると u, d クォークは m_p や m_n の 1/3 強の質量をもっていると期待される．しかし，(2.16) の u, d クォークの質量 $3 \sim 5\mathrm{MeV}/c^2$ は (2.4) の核子の質量 $m_\mathrm{N} \sim 1\mathrm{GeV}/c^2$ に比べ比較にならないほど小さい．m_N の大部分は，もともとのクォークの質量に起因しているのではない．

グルーオンがクォークに及ぼす強い力は，クォーク・反クォーク対に大きな結合エネルギーを生みだす．その結果，$\mathrm{q\bar{q}}$ 対は全エネルギーが0となり真空中にボーズ・アインシュタイン凝縮を起している．この現象は「カイラル対称性の自発的破れ」と呼ばれる．この「真空」環境の異変のため，クォークはグルーオンや $\mathrm{q\bar{q}}$ によって満たされたどろどろとした海の中を，それらを引きずりながら運動している．そのような状態のクォークについては，その有効質量 $\tilde{m}$ は素朴に期待される値，$\tilde{m}_\mathrm{u} \sim \tilde{m}_\mathrm{d} \sim 350\ \mathrm{MeV}/c^2$ と考えてよい．u, d, s を1個ずつ含む Λ 粒子の質量は $m_\Lambda = 1116\ \mathrm{MeV}/c^2$ なので，s クォークの質量は $\tilde{m}_\mathrm{s} \sim 500\,\mathrm{MeV}/c^2$ ということになる．このようにして定義されたクォークの質量は構成子クォーク質量と呼ばれる．これは直観的であり，また，ハドロン特にバリオンの性質をクォークの非相対論的束縛状態として定性的に理解するのに大変有用である．

注意深い読者には，それでは π メソンの質量 $m_\pi \simeq 140\,\mathrm{MeV}$ はどう考えればよいのかという疑問がわくであろう．1つの素朴で素直な考え方は，π メソンの中の q-$\mathrm{\bar{q}}$ 間にはとても大きな結合エネルギー $E_{\mathrm{q\bar{q}}}$ が生じるので，その結果 $\tilde{m}_\mathrm{u} + \tilde{m}_\mathrm{d} - E_{\mathrm{q\bar{q}}}/c^2 \simeq 140\,\mathrm{MeV}/c^2$ が実現されていると理解することであろう．もっと正確に理解するためには「カイラル対称性の自発的破れ」とは何かを学ばなければならない．

CHAPTER 3

素粒子の反応の基礎

素粒子は強い力，電磁力および弱い力の３種の力が複雑に絡み合って様々な現象を起している．それらの現象を理解するためには，まず，それらの力によって起る素粒子の運動を記述する表現方法を組み立てなければならない．この章でその表現方法を与える．それにもとづくと，素粒子の３種の力は基本的には大変単純な物理過程として実現されていることが理解できる．

3.1 ファインマン図

４元座標表記 y^μ で，時刻 y^0 に座標点 $\vec{y}$ にいた質量 m の粒子が，正のエネルギーをもって自由運動し，時刻 $x^0(> y^0)$ に座標点 $\vec{x}$ に到達する確率振幅を考察しよう．この運動を表す波動関数は，運動量の固有状態であるいくつもの平面波の重ね合わせで与えられる．その１つの平面波成分（運動量を $\vec{p}$，エネルギーを $E_p = c\sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2}$ とする）に着目すると

$$\psi \propto \exp \frac{-i}{\hbar} p_\mu (x^\mu - y^\mu) = \exp \frac{-i}{\hbar} \left(\frac{E_p}{c}(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \right) \qquad (3.1)$$

の形をしている．y^μ は初期条件を表す定数であり，x^μ の関数として ψ が $i\hbar\partial_\mu \psi = p_\mu \psi$ を満たしている．ψ の座標依存性が $x^\mu - y^\mu$ の形で入ってくるのは，４次元時空の並進対称性，すなわち自然法則は座標原点の取り方によらないことの反映である．この運動を図 3.1 のように時空点 y^μ から x^μ までを線で結び，運動方向に矢印を付けて表そう．図中，下方から上方に向かって時刻が進行しているとし，横方向は空間３次元の自由度を表すことにする．

第１章で見たように，相対論的波動方程式にもとづくと，正のエネルギーの解 (3.1) があれば，必ず負のエネルギーの解も現れる．今の場合それは

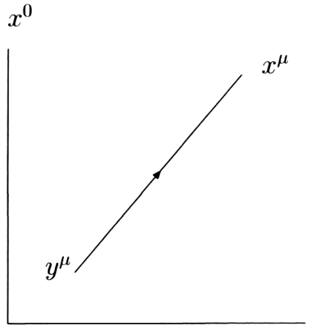


図 3.1　粒子の伝播

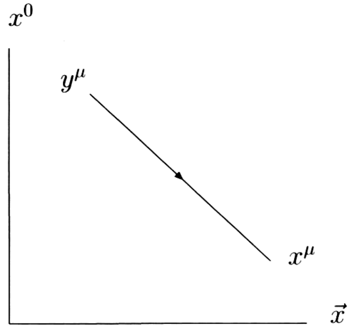


図 3.2　反粒子の伝播

$$\begin{aligned}\psi &\propto \exp \frac{i}{\hbar}\left(\frac{E_p}{c}(x^0 - y^0) - \vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})\right) \\ &= \exp \frac{-i}{\hbar}\left(\frac{E_p}{c}(y^0 - x^0) - \vec{p}\cdot(\vec{y}-\vec{x})\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

の形の解である．粒子の負のエネルギー解は反粒子の正のエネルギー解に対応していたことを思い出そう．(3.2) 式は最後の表式のように，始点と終点の役割を取り替えると，y^μ の関数と見て正のエネルギー解になる．この式は時刻の関係が $y^0 > x^0$ の時に正のエネルギーをもった反粒子が x^μ から y^μ まで図 3.2 のように運動している様子を表す波動関数を与えている．運動の方向に対して矢印が逆を向いていることでそれが反粒子の運動であることを示している．このように，粒子の運動を図を用いて表現することができる．時空点 x^μ と y^μ を線で結び，y^μ から x^μ の方向に矢印を付けておくことにより，$x^0 > y^0$ の時は矢印の方向に粒子が正のエネルギーをもって運動し，$y^0 > x^0$ の時は矢印と逆の方向に反粒子が正のエネルギーをもって運動している状況を 1 つの図で表現できる．真性中性粒子の場合は粒子と反粒子が同じなので，矢印はつけない．粒子の運動のこのような図による表現をファインマン図という．

3.2　素粒子相互作用の素過程

電荷をもった粒子の間には電磁相互作用を通して力がはたらくが，この力の伝達を微視的に見てみると，その素過程は，電荷をもった粒子が絶えず光子を放出したり吸収したりすることである．この放出・吸収の過程の量子力学的確

率振幅がその粒子の電荷の大きさに比例して定まっている．

第1章で示したように，量子力学における荷電粒子と電磁場との相互作用は，(1.58) に従った微分演算の置き換え

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c}QA_\mu \tag{3.3}$$

で定まっている．ここに Q は粒子の電荷である．したがって，電磁場と相互作用しつつ運動するクォークやレプトンの運動方程式は，自由粒子のディラック方程式 (1.39) にこの置き換えをすることによって得られる．

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c}Q\gamma^\mu A_\mu(x) - mc\right)\psi(x) = 0 \tag{3.4}$$

ここに x は4元座標 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ の略記である．

まず，電子 $(Q = -1)$ の運動について考察しよう．電磁場を含んだ項を右辺にもっていって，それを次式のように書こう．

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi(x) = -\frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \tag{3.5}$$

電磁場が存在しないときはこの式の右辺が0で，$\psi(x)$ は自由運動の方程式に従うのだから，右辺の項は電磁場の存在によって電子の運動がどのような影響を受けるか，その相互作用を与えている．波動方程式の観点から見ると，右辺は相互作用によって時空点 x^μ に作られる ψ の波源，すなわちそれを源にして ψ の新たな波が発生することを表している．

まず，(3.5) 式の $\psi(x)$ と $A_\mu(x)$ がすべて正エネルギー解の場合から考察しよう．右辺の $A_\mu(x)\psi(x)$ は，電子と光子がともに正エネルギーをもって運動してきて時空点 x^μ にたどり着く振幅を表している．この振幅に結合定数 $-e$ がかかったものが波源となって，左辺の $\psi(x)$ が表す正のエネルギーをもった1電子状態が作られ，それが時空点 x^μ から飛び去って行く．したがって，運動方程式 (3.5) は，図3.3のような電子による光子の吸収過程が，結合定数 $-e$ に比例した確率振幅で起ることを示している．

3.1節で見たように，場が負のエネルギー解の場合は，粒子の運動の始点と終点を取り替え，反粒子が逆の方向に運動するように見るのであった．$A_\mu(x)$ が負エネルギー解のときには，光子の反粒子は光子だから，図3.3の光子の運動方向を逆転させて，光子が放出される図3.4が得られる．このような光子の

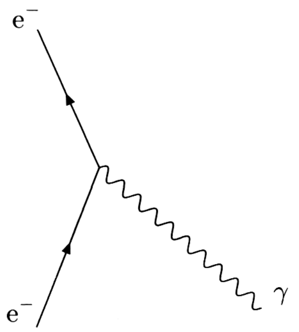


図 3.3　光子の吸収

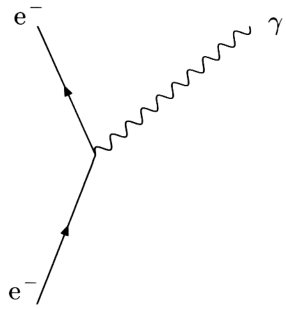


図 3.4　光子の放出

放出過程が吸収過程と同じ確率振幅で起ることになる．(3.5) の右辺の $\psi(x)$ が負エネルギーの場合は，負エネルギーの電子が飛んで来るのは，正エネルギーの陽電子が飛び去るように見直されるので，光子から電子と陽電子が対生成される図 3.5 の過程を表している．また，図 3.6 の対消滅の過程も存在する．これらの過程に，図 3.3 と図 3.4 の電子を陽電子に変えた過程を含めたものが電子の電磁相互作用の素過程をなしている．

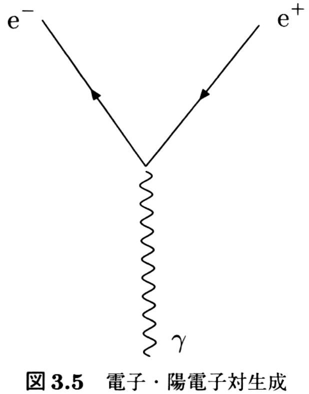


図 3.5　電子・陽電子対生成

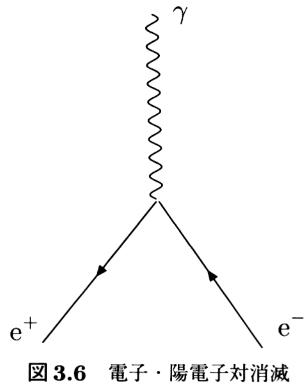


図 3.6　電子・陽電子対消滅

ほかのレプトンやクォークの電磁相互作用は，電子の素過程の結合定数 $-e$ を eQ に置き換えることによって素過程が求まる．これらの素過程がいろいろと組み合わさって電磁相互作用による反応は起る．たとえば，電荷を帯びた 2 個の粒子の系においては，図 3.7 のように一方の粒子が放出した光子をもう一方の粒子が吸収することができる．この光子の交換によって電荷をもった粒子

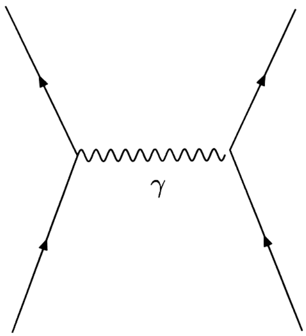


図 3.7 光子の交換

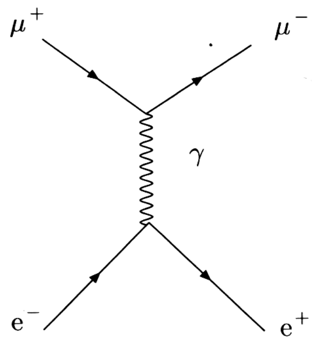


図 3.8 $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$

の間に力（クーロン力）が生じる．また，対消滅と対生成の組合せで，図 3.8 のような $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ の反応も起る．

素粒子の電気・磁気的力はすべてこれらの素過程がもとになって生じている．それらはまとめて電磁相互作用と呼ばれ，それらを支配する力学は「量子電気力学」と呼ばれる場の量子論である．この理論は古典的なマックスウェルの電磁気学を量子論として構築したもので，20 世紀の最初の 4 半世紀の量子力学の確立に引き続いて間もなく出来上がった理論である．

強い相互作用は，「色」をもった粒子がグルーオンを放出したり吸収したりすることを素過程として生じている．グルーオンは光子と同様に質量は 0 でスピンも 1 であり，強い相互作用と電磁相互作用は基本的にはよく似た特性を備えている．しかし，両者が引き起こす現象は全く異なっている．クォークはグルーオンを放出・吸収する際に色の状態を変化させている．また，グルーオン自体も「色」をもっており，グルーオンがグルーオンを放出・吸収することも可能になる．さらにグルーオン 4 個が関与する素過程も存在している．強い相互作用の素過程は図 3.9 の過程，および，それらの図でクォークやグルーオンの運動の方向を変えて得られる対生成や対消滅の過程等を含めたもので与えられる．これらの素過程は「量子色力学」によって決定されるものであり，その詳細は後に勉強することになる．

もう 1 つの基本的な力である「弱い力」は電荷 ±1 の $W^{\pm}$ および中性の Z^0 が媒介している．重たいクォークやレプトンの崩壊はこの力によって起る．弱い相互作用の素過程は，図 3.10 に示したクォークやレプトンによる W や Z の吸

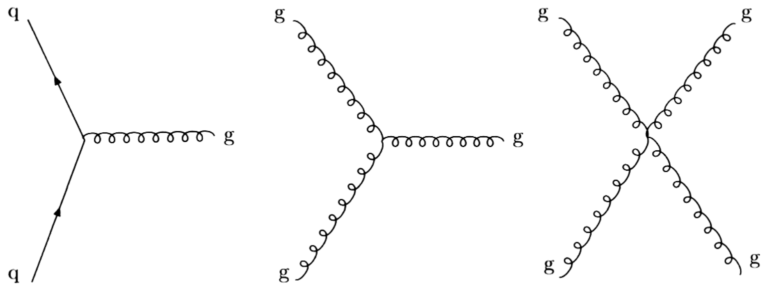


図3.9　クォーク・グルーオン素過程

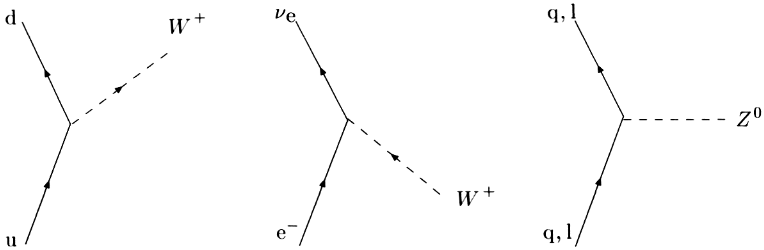


図3.10　W,Zの素過程

収・放出である．Wの吸収・放出においては，電荷の保存則を満たすように，電荷 $-1/3$ と $2/3$ のクォーク・フレーバー，および電荷 0 と -1 のレプトン・フレーバーの間の転換が起る．Zは中性であるから，その吸収・放出においてクォークやレプトンのフレーバーは変化しない．また，WやZは「無色」なので，それらの吸収・放出の際にクォークの色の状態は変化しない．

弱い相互作用のこれらの素過程を組み合わせると，たとえば図3.11のような $\mathrm{n} + \nu_{\mathrm{e}} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^-$ の反応がWの交換を通して起る．この図を変形して図3.12のように始状態の ν_e を終状態にもっていくと，それは反粒子に変わり $\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}$ となる．これは中性子の β 崩壊であり，これらの散乱過程と崩壊過程は基本的には同じ素過程の組合せで起っている．

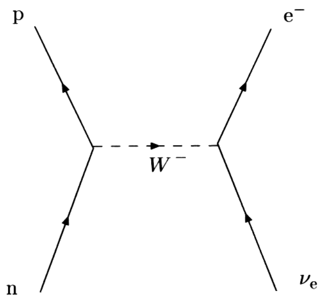


図 3.11　$n + \nu_e \to p + e^-$

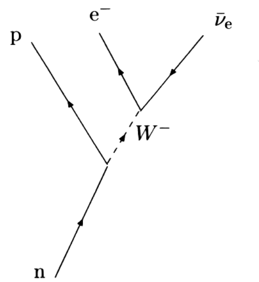


図 3.12　$n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$

3.3 エネルギーの保存則と仮想粒子

素粒子の反応は，強・電磁・弱の 3 種の相互作用の素過程がいろいろと組み合わさって起る．エネルギーと運動量の保存則により，反応が起る前のすべての粒子がもっていた 4 元運動量の総和は，反応が終わった後のすべての粒子の 4 元運動量の総和に等しくなければならない．しかし，反応の中間段階においてはエネルギーの保存則は明白な形では成り立っていないことに注意しなければならない．例として，先の $e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$ の反応を考えてみよう（図 3.13）．始状態の e^+ と e^- は反応の起きるずっと前（時刻 $t \to -\infty$）には空間的に十分離れており，それぞれ自由粒子として運動しているので，それらの 4 元運動量 p_1^μ, p_2^μ はともにアインシュタインの関係式 $p^\mu p_\mu = m_e^2 c^2$ を満たして

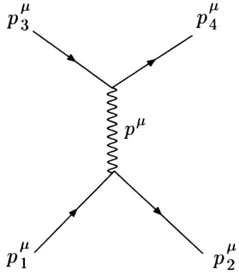


図 3.13　$e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-$

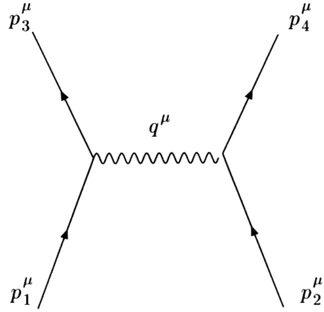


図 3.14　$e^- + \mu^- \to e^- + \mu^-$

いる．終状態（時刻 $t \to \infty$）の μ^+ と μ^- も同様で，それらの運動量 p_3^μ, p_4^μ も $p^\mu p_\mu = m_\mu^2 c^2$ を満たしている．エネルギーと運動量の保存則は，全4元運動量 p^μ が

$$p^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \tag{3.6}$$

の条件を与える．相互作用の素過程においてエネルギーと運動量の保存を要請すると，中間状態の光子は全4元運動量 p^μ を担う．しかし，終状態で μ^+ と μ^- が対生成されるためには，その2乗は $p^\mu p_\mu > 4m_\mu^2 c^2$ でなければならず，質量が0の光子の4元運動量の条件 $p^\mu p_\mu = 0$ は満たされない．全運動量が0である重心系で見ると，始状態や終状態の全エネルギーは $E \neq 0$ であるのに，中間状態では質量0で運動量が0の光子のエネルギーは0のはずで，エネルギーの保存していない中間状態を経由していることになる．このような中間状態は，時間とエネルギーの間の不確定性関係 $\Delta t \Delta E = \hbar$ でゆるされるわずかの時間の間は持続するが，いずれは対生成の素過程を通してエネルギー保存則を満たす終状態に移らなければならない．このような光子は仮想光子と呼ばれる．

もう1つの例として $\mathrm{e}^- + \mu^- \to \mathrm{e}^- + \mu^-$ の散乱を見てみよう．この反応においても図3.14のように光子が e^- と μ^- の間で交換される．この中間状態の光子の4元運動量は

$$q^\mu = p_1^\mu - p_3^\mu = p_4^\mu - p_2^\mu \tag{3.7}$$

となるが，この q^μ は，始状態と終状態の粒子の4元運動量がアインシュタインの関係式を満たす限り，$q^\mu q_\mu < 0$ の値しかゆるされない（自習問題[1]参照）．これらの例に限らず，一般に反応のすべての素過程において4元運動量が保存するように各粒子にエネルギーをふりわけたときには，中間状態に現れる粒子の4元運動量はアインシュタインの関係式を満たさない．このような状態の粒子は仮想粒子と呼ばれる．

素粒子反応は結局，いろいろな仮想粒子を含んだ中間状態を経由して起るわけである．その反応の確率振幅の求め方は場の量子論によって定まっている．その導出の詳細は本書の目標の外であるのでこれ以上立ち入らないが，結果はとても単純である．たとえば質量 m のボソンが仮想粒子状態で4元運動量 p^μ をもって反応に関与しているとき，反応振幅は

$$\frac{\hbar^2}{m^2c^2 - p^2} \qquad p^2 \equiv p^\mu p_\mu \tag{3.8}$$

の因子，およびその仮想粒子が生成されたり吸収されたりする際の相互作用の強さ（結合定数）の積で構成される．

3.4 短距離ポテンシャル

クォークやレプトンが W や Z を吸収したり放出したりする相互作用の強さは，電子が光子を吸収・放出する際の強さとおよそ同じ程度である．それにも関わらず，弱い相互作用の反応が起りにくいのは，W や Z が大変大きな質量をもっているためである．その事情をここで考察しておこう．

電荷 -1 をもった静止した電子の周りには静電ポテンシャル

$$\phi = -\frac{e}{4\pi r} \tag{3.9}$$

が生じる．このポテンシャルはガウスの法則にもとづき，次の方程式の解として導き出される．

$$\nabla^2 \phi = e\delta^3(\vec{x}). \tag{3.10}$$

この方程式は，原点に静止した電荷があるとき，そのまわりに生じる静的なポテンシャルがどのような振舞いをするかを記述している．「静的」の条件をはずしたもっと一般的な状況のもとでは，ポテンシャル ϕ は相対論的に共変な方程式に従う．真空中（電荷が存在しないとき）では，それは次の波動方程式

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = 0 \tag{3.11}$$

で与えられる．これは質量が 0 である光子のエネルギーと運動量の関係式 $(E/c)^2 - \vec{p}^2 = 0$ に量子力学の対応付け $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$，$\vec{p} \to -i\hbar\vec{\nabla}$ をしたものに相当する．

力を伝える粒子（W や Z）が質量 m をもっているときは，$(E/c)^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$ だから，その粒子に付随した場は真空中では

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = 0 \tag{3.12}$$

に従う．原点に場の源（W や Z を吸収・放出する点源）がある場合の静的な方程式は

$$\left(\nabla^2 - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi = g\delta^3(\vec{x}) \tag{3.13}$$

となる．$-g$が点源の「電荷」である．この方程式の解は

$$\phi = -\frac{g}{4\pi r}e^{-\frac{1}{\hbar}mcr} \tag{3.14}$$

で与えられる（自習問題 [2] 参照）．rの位置に原点と逆の「電荷」gの粒子がいると，粒子間のポテンシャル・エネルギーは

$$V = -\frac{g^2}{4\pi r}e^{-\frac{1}{\hbar}mcr} \tag{3.15}$$

である．指数関数のために距離rが$\hbar/mc$より大きくなるとポテンシャルは急速に0に近づき，WやZの吸収·放出による力は消滅する．すなわちそれらのコンプトン波長$\hbar/mc$はそれらが媒介する力の到達距離と見なすことができる．WとZの質量 (2.24) からこの到達距離を求めるとわずか $(2.2 \sim 2.5) \times 10^{-18}$ m となる．このために，WやZによる弱い相互作用の力は，電磁相互作用による力よりはるかに小さな効果しか生じない．

力の到達距離が$\hbar/mc$になるのは不確定性関係により以下のように直観的に理解することもできる．静的な点源から質量mの粒子が生成され，その状態が持続できるのは，$\Delta t \Delta E = \hbar$ でゆるされる時間 $\Delta t = \hbar/mc^2$ の間だけである．したがって，それが媒介する力の及ぶ領域は，この時間に光速cをかけた$\hbar/mc$の範囲に限られる．

ポテンシャル・エネルギー (3.15) のもとでの散乱問題を，量子力学の摂動理論にもとづいてボルン近似で求めてみよう．標的粒子が原点に固定された静的なポテンシャルによる散乱だから，エネルギーの保存則により入射粒子と散乱粒子のエネルギーは $E_{\rm i} = E_{\rm f}$ である．入射粒子の運動量を$\vec{p}_{\rm i}$，散乱粒子の運動量を$\vec{p}_{\rm f}$としてそれぞれ平面波で表すと，散乱振幅は定数係数を省略するとVの行列要素

$$A = \int d^3\vec{x}\; e^{\frac{-i}{\hbar}\vec{p}_{\rm f}\cdot\vec{x}}V(r)e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}_{\rm i}\cdot\vec{x}} \tag{3.16}$$

で与えられる．積分を実行すると

$$A({\rm W},{\rm Z}) = -g^2\frac{\hbar^2}{m^2c^2 + (\vec{p}_{\rm f} - \vec{p}_{\rm i})^2} \tag{3.17}$$

が求まる（自習問題 [3] 参照）．粒子の運動量が数 GeV/c 程度の低エネルギー散乱では，分母の中でm^2c^2の項に比べて$(\vec{p}_{\rm f} - \vec{p}_{\rm i})^2$は無視できるので，散乱振幅は力を媒介するWやZの質量mの逆2乗に比例して小さくなっている．

光子によるクーロン力 (3.9) の場合には，$m=0$ だから散乱振幅は

$$A(\text{光子}) = -e^2 \frac{\hbar^2}{(\vec{p}_{\rm f} - \vec{p}_{\rm i})^2} \tag{3.18}$$

となる．この振幅は，$\vec{p}_{\rm f} \simeq \vec{p}_{\rm i}$ となる前方散乱や，$|\vec{p}_{\rm f} - \vec{p}_{\rm i}|$ が小さい低エネルギーの散乱のときにはとても大きくなる．しかし，$|\vec{p}_{\rm f} - \vec{p}_{\rm i}| \geq mc$ の高エネルギーの散乱においては $A({\rm W,Z}) \simeq A(\text{光子})$ となり弱い相互作用と電磁相互作用の効果は同程度になる．

(3.17) と (3.18) は仮想粒子による反応振幅 (3.8) の一例になっている．仮想粒子は今の場合 W, Z および光子である．それらの 4 元運動量 q^μ は入射粒子と散乱粒子の 4 元運動量 $p_{\rm i}^\mu, p_{\rm f}^\mu$ の差 $q^\mu = p_{\rm f}^\mu - p_{\rm i}^\mu$ である．$E_{\rm i} = E_{\rm f}$ なので $q^2 = -(\vec{p}_{\rm f} - \vec{p}_{\rm i})^2$ となり (3.17) は

$$A({\rm W,Z}) = -g^2 \frac{\hbar^2}{m^2c^2 - q^2} \tag{3.19}$$

と表される．質量 m をもった仮想粒子が 2 粒子間で交換されることによって，2 粒子の間にポテンシャル・エネルギー (3.15) が生じるのである．

3.5　不安定粒子

大多数の素粒子は，より軽い粒子へと崩壊する．光子は質量が 0 だからエネルギーの保存則により絶対的に安定な粒子である．電子 e^- は電荷をもった一番軽い粒子だから電荷の保存則により絶対的に安定である．半整数スピンをもった一番軽い粒子は，角運動量の保存則により絶対的に安定な粒子である．断言はできないが，それは 3 種のニュートリノ $\nu_{\rm e}, \nu_\mu, \nu_\tau$ の中の一番軽い粒子であろうと予想される．

これら以外の粒子はより軽い粒子へと崩壊する．陽子は電荷や角運動量の保存則に抵触せずに，たとえば $\mathrm{p} \to \mathrm{e}^+ + \pi^0$ 等の崩壊が可能である．また原子核の中で安定に存在している中性子も $\mathrm{n} \to \mathrm{e}^+ + \pi^-$ 等が可能である．これまでのところ，これら核子の崩壊は観測されておらず，その寿命は（2011 年現在）10^{33} year の下限が得られている．陽子を安定に保つ保存則はバリオン数の保存則と呼ばれるが，それは厳密に成り立つ保存則ではなく，陽子は $10^{36\sim38}$ year 程度の有限の寿命をもつと予想されている．

このように，大多数の素粒子は長短の差はあっても，有限の寿命をもった不安定な粒子である．粒子aの寿命をτ secとしよう．逆数$1/\tau$は単位時間当りの崩壊確率である．これに$\hbar$をかけてエネルギーの次元にした

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \tag{3.20}$$

は粒子の崩壊幅と呼ばれる．粒子がいろいろなモードiに崩壊するときは，Γはそれぞれのモードへの崩壊の部分幅$\Gamma(\mathrm{i})$をすべての崩壊モードiについて足し合せた

$$\Gamma = \sum_{\mathrm{i}} \Gamma(\mathrm{i}) \tag{3.21}$$

で与えられる．$\Gamma(\mathrm{i})$は，崩壊$\mathrm{a} \to \mathrm{i}$の確率振幅$g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})$の絶対値の二乗に比例する．$R(\mathrm{i}) \equiv \Gamma(\mathrm{i})/\Gamma$は分岐比と呼ばれる．

質量mの粒子aが時刻$t=0$に生成されたとする．aの静止系で時刻$t(>0)$にaが生存している確率は$P(t)=e^{-t/\tau}$である．aの確率振幅$U_{\mathrm{a}}(t)$のt依存性は，静止エネルギーmc^2による位相の変化と，有限の寿命のために絶対値が減少する2つの因子の積

$$U_{\mathrm{a}}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}mc^2 t} e^{-\frac{\Gamma}{2\hbar}t} \tag{3.22}$$

で与えられる．$P(t) = |U_{\mathrm{a}}(t)|^2$である．

始状態iから中間状態に粒子aが作られ，それが終状態jに崩壊する反応

$$\mathrm{i} \to \mathrm{a} \to \mathrm{j} \tag{3.23}$$

を考察しよう．始状態と終状態のエネルギーを$E_{\mathrm{i}}, E_{\mathrm{j}}$とすると，それぞれの波動関数は

$$\psi_{\mathrm{i}}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\mathrm{i}}t}\ , \quad \psi_{\mathrm{j}}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\mathrm{j}}t} \tag{3.24}$$

である．時刻t_{i}にaが生成され，時刻t_{j}に崩壊する反応振幅は

$$A_{\mathrm{a}}(t_{\mathrm{j}}, t_{\mathrm{i}}) = \psi_{\mathrm{j}}(t_{\mathrm{j}})^* g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}) U_{\mathrm{a}}(t_{\mathrm{j}} - t_{\mathrm{i}}) g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^* \psi_{\mathrm{i}}(t_{\mathrm{i}}) \tag{3.25}$$

と表される．$g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^*$は状態iからaが作られる確率振幅である．これを$t_{\mathrm{i}} < t_{\mathrm{j}}$の制限のもとに$t_{\mathrm{i}}$と$t_{\mathrm{j}}$について積分したものが中間状態にaを経由した反応振幅となる．(3.22),(3.24)を代入すると

$$A_{\mathrm{a}}(\mathrm{i} \to \mathrm{j}) = g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}) g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^* \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\mathrm{j}} \int_{-\infty}^{t_{\mathrm{j}}} dt_{\mathrm{i}} e^{\frac{i}{\hbar}E_{\mathrm{j}}t_{\mathrm{j}}} e^{-\frac{i}{\hbar}(mc^2 - i\Gamma/2)(t_{\mathrm{j}} - t_{\mathrm{i}})} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{\mathrm{i}}t_{\mathrm{i}}}$$

$$= i\hbar \frac{g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j})g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^*}{E_{\mathrm{i}} - mc^2 + i\Gamma/2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{\mathrm{j}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{i}})t_{\mathrm{j}}} \tag{3.26}$$

が求まる．最後の積分はデルタ関数の公式により

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_{\mathrm{j}} e^{\frac{i}{\hbar}(E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{i}})t_{\mathrm{j}}} = 2\pi\hbar\delta(E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{i}}) \tag{3.27}$$

である．これは反応 (3.23) においてエネルギーが保存していることを意味している．(3.26) はブライト・ウィグナー振幅と呼ばれる．

(3.25) の時刻の積分を $t_{\mathrm{i}} < t_{\mathrm{j}}$ に制限したが，$t_{\mathrm{j}} < t_{\mathrm{i}}$ の反応はどうなるのであろうか．3.1 節で考察したように，それは時刻 t_{j} から時刻 t_{i} まで反粒子 $\bar{\mathrm{a}}$ が運動しているようにみなさなければならなかった．したがって (3.25) の $U_{\mathrm{a}}(t_{\mathrm{j}} - t_{\mathrm{i}})$ を反粒子の確率振幅 $U_{\bar{\mathrm{a}}}(t_{\mathrm{i}} - t_{\mathrm{j}})$ に置き換えて，$t_{\mathrm{j}} < t_{\mathrm{i}}$ の制限をつけて積分したものは，中間状態に $\bar{\mathrm{a}}$ が関与した反応振幅 $A_{\bar{\mathrm{a}}}(\mathrm{i} \to \mathrm{j})$ を与える．反粒子は粒子と同じ質量 m および同じ崩壊幅 Γ をもっている．反応 (3.23) の反応振幅は 2 つの振幅の和

$$\begin{aligned} A(\mathrm{i} \to \mathrm{j}) &= A_{\mathrm{a}}(\mathrm{i} \to \mathrm{j}) + A_{\bar{\mathrm{a}}}(\mathrm{i} \to \mathrm{j}) \\ &= i2\pi\hbar^2\delta(E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{i}}) \left[\frac{g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j})g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^*}{E_{\mathrm{i}} - mc^2 + i\Gamma/2} - \frac{g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j})g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^*}{E_{\mathrm{i}} + mc^2 - i\Gamma/2} \right] \\ &= -i2\pi(2m - i\Gamma/c^2)\delta(E_{\mathrm{j}} - E_{\mathrm{i}}) \\ &\qquad \times \frac{\hbar^2 g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j})g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^*}{m^2c^2 - (E_{\mathrm{i}}/c)^2 - im\Gamma - \Gamma^2/4c^2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

で与えられる．最後の表式の分母の中の $\Gamma^2/4c^2$ はほかの項に比べて小さいので無視することができる．E_{i} は重心系の全エネルギーだったので，全 4 元運動量 p^μ は $p^\mu p_\mu = (E_{\mathrm{i}}/c)^2$ である．振幅の全体の係数は状態の規格化などをどうとるかによって変わるが，この結果から，質量が m，崩壊幅 Γ の不安定粒子が 4 元運動量 p^μ で反応に関与すると，反応振幅に

$$g_{\mathrm{a}}(\mathrm{j}) \frac{\hbar^2}{m^2c^2 - p^2 - im\Gamma} g_{\mathrm{a}}(\mathrm{i})^*\,, \qquad p^2 \equiv p^\mu p_\mu \tag{3.29}$$

の因子を与えることがわかる．反粒子の寄与を含めることによって反応振幅が相対論的にバランスのとれた表式になっている．これは相対性理論が反粒子の存在を実現していることの帰結である．(3.29) は 3.3 節で述べた仮想粒子の振幅 (3.8) を不安定粒子に拡張したものになっている．

自習問題

[1]　(3.7) の光子の4元運動量 q^μ から $q^\mu q_\mu$ を作ると，これは座標系によらない不変量である．始状態の e^- の静止系で $p_1^\mu = (m_\mathrm{e}c, 0), p_3 = (E_3/c, \vec{p}_3)$ と表すことにより，$q^\mu q_\mu < 0$ を示せ．

[2]　有限の質量をもった粒子のポテンシャル (3.14) が微分方程式 (3.13) の解であることを極座標での公式 $\nabla^2\phi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi(r)}{\partial r}\right)$ を用いて確かめよ．

[3]　(3.16) の積分は，$\vec{p}_\mathrm{f} - \vec{p}_\mathrm{i}$ の方向を z 軸にとると極座標で

$$A = \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\phi\ V(r) e^{-\frac{i}{\hbar}|\vec{p}_\mathrm{f} - \vec{p}_\mathrm{i}| r\cos\theta} \tag{3.30}$$

と表される．これを実際に積分することにより (3.17) を確かめよ．

コラム：陽子の寿命

陽子の寿命の現在の実験的下限は 10^{33} 年といわれている．宇宙の年齢でさえ高々100億 (10^{10}) 年程度なのに，それよりさらに 10^{23} 倍も長い途方もない寿命が一体どのようにして求められるのであろうか．

水1gの中にはアボガドロ数 (6.022×10^{23}) 個の核子が含まれている．この中の核子が1年間に1個の割合で崩壊したとすると，崩壊確率 $1/\tau$ は

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{6.022 \times 10^{23}} \times \frac{1}{1\ \mathrm{year}}$$

すなわち，核子の寿命は $\tau = 6.022 \times 10^{23}$ year ということになる．

神岡にあるスーパー・カミオカンデはニュートリノの観測で目覚ましい成果をあげているが，そのほかにも重要な実験として核子崩壊の観測を行っている．それは5万トン (5×10^{10}g) の水を満たした円筒状の水槽の内面を11146本の光電子増倍管で覆って，核子崩壊のシグナルを探索している．実験を開始して十数年になるが，これまでのところ核子の崩壊と断定できる反応例は観測されていない．

CHAPTER 4

ハドロンの反応

素粒子の反応は，強・電磁・弱の 3 種の相互作用の素過程がいろいろ組み合わさって起る．素粒子の世界の実験的情報を得る一番直接的な方法は，素粒子同士を衝突させて，何が起るかを観測することである．衝突のエネルギーをいろいろ変えたり，あるいは衝突させる粒子の種類を変えることによって，いろいろな情報を得ることができる．この章ではハドロンの反応についてその概略を見よう．

4.1 ハドロンの衝突反応

衝突反応の基本的な観測量は衝突断面積である．その直観的な理解のため，まず，半径が r_1 と r_2 の剛体球の衝突の古典論による記述を考えよう．2 個の剛体球が衝突するかどうか，その衝突の確率の目安は図 4.1 から明らかなように半径 $r_1 + r_2$ の円の面積

$$\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 \tag{4.1}$$

である．これは衝突断面積と呼ばれる．1 番目の粒子を原点に固定しておき，

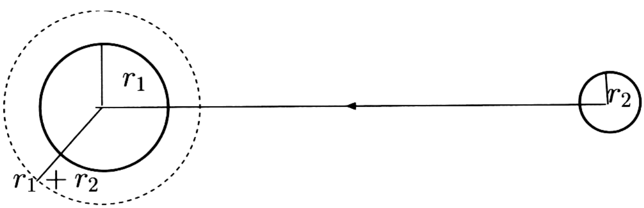


図 4.1 剛体球の衝突

2番目の粒子のビームを単位時間（1 s）に単位断面積 (1 m^2) 当り1個通過するように入射させたとき1秒間に衝突が起る回数がσである．σは衝突するかどうかの情報しか含んでいないが，実験的にはもっと詳細な情報も得られる．たとえば衝突した粒子が，衝突後ある方向（天頂角θ, 方位角ϕ）の微少立体角$d\Omega$の中にどれくらいの割合で入るか，その微分量を

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \tag{4.2}$$

と表し，この係数$d\sigma/d\Omega$で微分断面積が定義できる．これを全立体角で積分したものは全断面積

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \tag{4.3}$$

となる．

量子力学にもとづいて衝突反応を記述するときに基本となるのは，反応の起る確率を与えるもととなる反応振幅である．衝突反応の起るずっと前の状態$|\Psi_{\mathrm{i}}\rangle$を始状態とする．そこでは，2つの粒子は十分距離が離れており，それぞれは運動量の固有状態として自由運動をしている．時間が経過するにつれて2つの粒子は接近し，粒子の間に相互作用が生じるようになると，いろいろな素過程の組合せを通して，複雑な量子力学的状態$|\Psi(t)\rangle$が実現される．時間が十分経過した後には反応はおさまり，状態は相互作用を通して実現が可能な，いろいろな終状態$|\Psi_{\mathrm{f}}\rangle$の重ね合わせの状態$\sum_{\mathrm{f}} |\Psi_{\mathrm{f}}\rangle$になっている．それぞれの終状態$|\Psi_{\mathrm{f}}\rangle$は，十分距離が離れたいくつかの粒子が自由運動している状態であり，それらの粒子は運動量の固有状態として取り扱うことができる．実際に衝突実験を行うと，一つひとつの衝突ごとに，どれか1つの終状態$|\Psi_{\mathrm{f}}\rangle$が観測されることになる．その確率は$|\Psi_{\mathrm{i}}\rangle$から$|\Psi_{\mathrm{f}}\rangle$への遷移の反応振幅$A(\Psi_{\mathrm{i}} \to \Psi_{\mathrm{f}})$の絶対値の2乗によって定まる．たとえば終状態が2粒子状態のときは，衝突の微分断面積が

$$\frac{d\sigma_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}}{d\Omega} = N|A(\Psi_{\mathrm{i}} \to \Psi_{\mathrm{f}})|^2 \tag{4.4}$$

で与えられる．係数Nは散乱された粒子の進行方向の立体角$d\Omega$の中に含まれる量子状態の数，および入射粒子が単位時間単位断面積当り1個通過するように反応振幅を規格化するための因子の積である．

終状態を構成する粒子の種類を指定し，それぞれの粒子の運動の方向について微分断面積を積分したもので，始状態からその終状態への断面積

$$\sigma_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = \int d\sigma_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} \tag{4.5}$$

を定義すると，全断面積 σ_{T} は $\sigma_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}}$ をすべての可能な終状態について和をとったもので与えられる．

$$\sigma_{\mathrm{T}} = \sum_{\mathrm{f}} \sigma_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} \tag{4.6}$$

4.2　陽子・中性子散乱

まず最初に代表的なハドロン反応である陽子と中性子の衝突過程を考察しよう．始状態は陽子と中性子の2粒子状態である．終状態も始状態と同じく陽子と中性子の2粒子状態であるとき，この反応過程は弾性散乱と呼ばれる．衝突のエネルギーを大きくすると，弾性散乱だけでなく，衝突の過程で新たな粒子が生成されることも可能となり，終状態が3個以上の粒子を含むような反応も起るようになる．これらの反応過程は非弾性散乱と呼ばれる（図4.2）．非弾性散乱は，素過程の観点から微視的に見ると，衝突の際に陽子や中性子の中のクォークやグルーオンが十分大きなエネルギーをもった仮想粒子状態のグルーオンを放出し，それがクォークと反クォークの対生成を引き起こすことによって実現されている．衝突のエネルギーが小さいときには質量の小さなuやdの対生成しか起らないので，終状態に加わってくる粒子はこれらのクォークで構成された π メソンが主要なものとなるが，エネルギーが大きくなるにつれs，c，さらにもっと質量の大きなbやtの対生成も可能となり，これら重たいクォークフレーバーを含んだ様々なハドロンが生成される．

陽子–中性子散乱の断面積のエネルギー依存性の大まかな振舞いは図4.3のようである．横軸は始状態の重心系（陽子と中性子の運動量のベクトル和がゼロとなる座標系）での全エネルギー $E_{\mathrm{cm}} = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{n}}$，また縦軸の断面積の単位

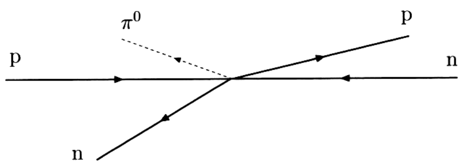


図4.2　陽子–中性子散乱

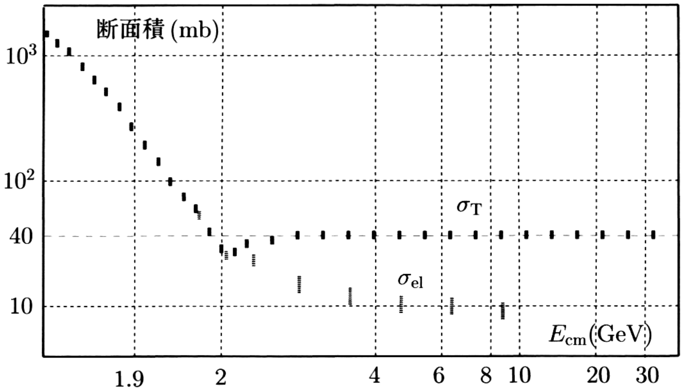


図 4.3　陽子–中性子散乱の断面積

は 1 mb=10^{-31} m^2 である．弾性散乱の断面積 σ_{el} は衝突のエネルギー E_{cm} を上げていくと減少していく．これは直観的には次のように理解できる．陽子や中性子はグルーオンの力によって構成されたクォークの複合系の基底状態である．高いエネルギーの衝突によって揺さぶられると，それらは励起状態に遷移する確率が大きくなり，基底状態にとどまったまま飛び去る（すなわち弾性散乱の）確率は減少する．あらゆる可能な終状態への断面積を合計した全断面積 σ_T はエネルギーが 3 ∼100 GeV の広いエネルギー領域で，ほぼ一定値

$$\sigma_T \sim 4.0 \times 10^{-30}\ \mathrm{m}^2 \tag{4.7}$$

になる（正確には，高エネルギー領域でエネルギーとともにわずかに増大していく傾向にある）．

強い相互作用による衝突断面積は陽子–陽子散乱や中性子–中性子散乱においてもほぼ同様の振舞いを示す．(4.7) 式の全断面積を日常的な感覚の反応にやき直してみよう．水 1 cm^3 は 1 g であり，その中にはアボガドロ数 (6.022×10^{23}) 個の核子が含まれている．これに 1 個当りの断面積をかけると

$$\sigma_T \times 個数 = 2.4 \times 10^{-2}\ \mathrm{cm}^2 \tag{4.8}$$

となる．すなわち，陽子あるいは中性子が水中を 40 cm 進むとほぼ 1 回原子核に衝突することを意味している．この計算は水中にある原子核中の核子の重なりを無視しているので正確ではないがそれほど大きな間違いはない．地球の周

りには多数の宇宙線が飛び回っている．その代表的な粒子は陽子であり，1秒間，1平方センチ，1立体角 (rad) 当りおよそ1個くらいの密度で地球に降り注いでいる．これらがまともに地上に降り注ぐと大変であるが，幸運なことに，地表付近には大気がある．大気の厚さは水に換算すると約10 m であり，宇宙から飛来してきた高エネルギーの陽子は大気に突入すると何回も大気中の原子核と衝突し，エネルギーを失って，途中で止まってしまう．地表まで高速で到達する陽子の数はほんのわずかである．

陽子と中性子を半径 r_N の剛体球とみなすと，全断面積の関係式 (4.1)

$$\sigma_T = 4\pi r_N^2 = 4.0 \times 10^{-30}\ \mathrm{m}^2 \tag{4.9}$$

から，核子の大きさとして $r_N \sim 0.56 \times 10^{-15}$ m が求まる．核子を構成しているクォークはこれくらいのせまい領域の中にグルーオンの力によって閉じ込められている．

4.3　核力を媒介する粒子

核子・核子衝突において核子の間にはたらく力は，多数の核子を結び付けて原子核を構成する核力ともなっているが，この力が産み出される微視的過程は，図4.4のように，それぞれの核子の中にいたクォークやグルーオンが，衝突の際に入れ替わる等，大変複雑なものである．この過程は大まかには，クォークと反クォークの対がグルーオンを伴いつつ，ひとかたまりとなって一方の核子から他方の核子に乗り移っているように見ることができる．すなわち，2つ

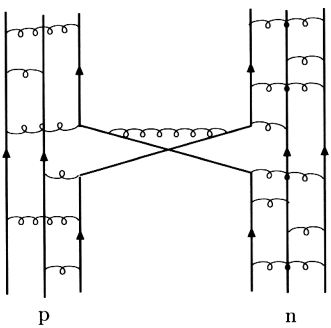


図 4.4　陽子–中性子散乱の微細

の核子の間にメソンが交換されているように見なせる．質量 m_i のメソンの交換による核子間のポテンシャルエネルギーは第3章で求めた(3.15)式がそのまま適用でき

$$V_i = \eta_i \frac{g_i g_i'}{4\pi r} e^{-\frac{1}{\hbar} m_i c r} \tag{4.10}$$

となる．ここに g_i, g_i' はそれぞれの核子がこのメソンを吸収したり放出したりする強さ，すなわち結合定数，$\eta_i = \pm 1$ はメソンのスピンやその他の量子数で定まる．一番遠くまで力を及ぼすのは一番軽いメソンであり，そのメソンによる力の到達距離 $\hbar/m_i c$ は，核力が効き始める核子間隔，すなわち先に求めた核子の「半径」$r_{\rm N}$ の2倍程度と予想される．これからこのメソンの質量を見積もると

$$m \sim \frac{\hbar}{c} \frac{1}{2r_{\rm N}} \sim 200\ {\rm MeV}/c^2 \tag{4.11}$$

となる．すなわち，これくらいの質量をもったメソンが存在しているはずだということが核力の振舞いから予想される．これは，核子がクォークやグルーオンから構成されているということがわかる遥か以前に，湯川秀樹によって予言され，その後存在が検証された粒子，すなわち π メソンである．π メソンには，電荷を帯びた $\pi^\pm$ と中性の π^0 があり，それらの質量は

$$m_{\pi^\pm} = 139.6\,{\rm MeV}, \qquad m_{\pi^0} = 135.0\,{\rm MeV} \tag{4.12}$$

クォーク組成は

$$\pi^+ = \bar{\rm d}{\rm u}, \qquad \pi^- = -\bar{\rm u}{\rm d}, \qquad \pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{\rm u}{\rm u} + \bar{\rm d}{\rm d}) \tag{4.13}$$

である．π^0 がどうして2種類の状態 $\bar{\rm u}{\rm u}$ と $\bar{\rm d}{\rm d}$ との重ね合わせとして実現されているのか（および，ここに現れている符号の意味も含めて），その理由は，後で学ぶアイソスピンの対称性で明らかになる．π メソンが核子から吸収・放出される強さ，すなわち結合定数 g_π の大きさは

$$\frac{g_\pi^2}{4\pi\hbar c} = 14.9 \tag{4.14}$$

であることが実験結果から求まっている．これは電磁相互作用による光子の吸収・放出の強さ $\alpha \sim 1/137$ に比べてはるかに大きい．これが核力が「強い相互作用」と呼ばれるようになった歴史的ゆえんである．核力の素過程である

クォークによるグルーオンの吸収・放出の強さ g_s は，(2.8) で概算したように $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi\hbar c \sim (0.1 \sim 1)$ 程度であり，これほどは強くない．

この強い結合定数 g_π のため，核子同士を十分高いエネルギーで衝突させると，容易に π メソンの生成が起る．

4.4　π メソンの崩壊

$\pi^\pm$ と π^0 はほぼ等しい質量をもっており，強い相互作用における性質は大変似かよっている．これらは強い相互作用によって崩壊することはない．π^- は主に $\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の崩壊を起すが，これは図 4.5 の左図のように，弱い相互作用の素過程によって中間的に W^- の仮想粒子状態を経由する．一方，π^0 は図 4.5 の右図のように電磁相互作用によって光子 2 個に崩壊する．この素過程の違いのために，これらの粒子の寿命は下のように大変異なっている．

$$\tau_{\pi^\pm} = 2.60 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}, \quad \tau_{\pi^0} = 8.4 \times 10^{-17}\ \mathrm{s} \tag{4.15}$$

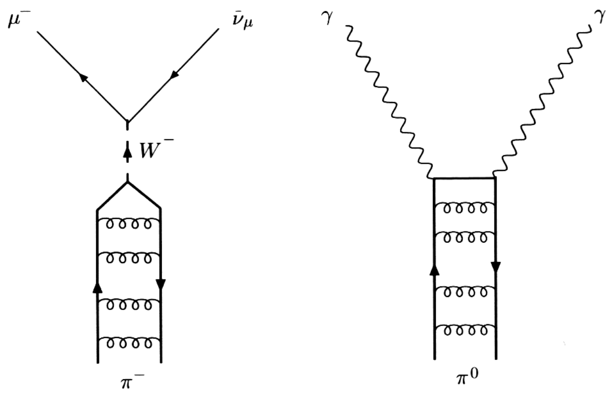


図 4.5　π メソンの崩壊

これらの粒子が生成されてから崩壊するまでにどれくらいの距離を粒子として運動するか，その目安は，その寿命に光速をかけたもので見積もれる．$\pi^\pm$ については 7.8 m，すなわちマクロな距離を粒子の性質を保ったまま飛び回る．π^0 は 2.5×10^{-8} m でかなり短いが，核子の大きさあるいは π メソンのコンプトン波長 $\hbar/m_\pi c \simeq 10^{-15}$ m に比較すると十分長距離を粒子として走る．

4.5 ハドロンの共鳴状態

核子・核子衝突で生成された $\pi^{\pm}$ メソンは崩壊するまでにかなり長距離を走るので，これらを集めてビームとして，さらに核子と衝突させる実験が可能である．π^{+}-p 衝突の全断面積を図 4.6 に示す．横軸は重心系の全エネルギーである．前と同様にほぼ一定となる高エネルギー領域の値 $\sigma_{\mathrm{T}} \sim 2.5 \times 10^{-30}\ \mathrm{m}^2$ から，剛体球衝突とみなして $\sigma_{\mathrm{T}} = \pi(r_\pi + r_{\mathrm{N}})^2$ によって π メソンの半径を見積もると，核子よりもすこし小さな値 $r_\pi \sim 0.33 \times 10^{-15}$ m が得られる．

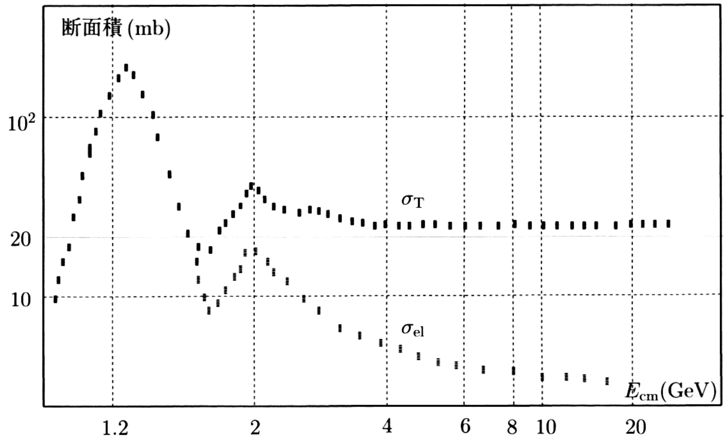


図 4.6　π^{+}-p 散乱の全断面積

σ_{T} には，核子・核子衝突の場合と様相が異なり，いくつかのピークが存在する．これらのピークはハドロンの準安定状態が中間状態として実現されることによって現れるもので，共鳴状態と呼ばれる．陽子や中性子等はクォーク 3 個で構成された，エネルギー準位の一番低いバリオンの状態である．原子や原子核に励起状態が存在するように，バリオンにも励起状態が存在する．σ_{T} の最初のピークは Δ^{++} と呼ばれる．これは u クォーク 3 個で構成された電荷 2，スピン 3/2 をもったバリオンである．そのエネルギー準位すなわち Δ の質量 m は 1232 MeV/c^2 で陽子と π メソンの質量の和よりも大きいため，強い相互作用の素過程を通して $\mathrm{d\bar{d}}$ の対生成により容易に崩壊 $\Delta^{++}(\mathrm{uuu}) \to \pi^{+}(\mathrm{u\bar{d}}) + \mathrm{p(uud)}$ が起る．当然，その逆の過程も起るので中間状

態にΔを経由した$\pi^+ + \mathrm{p} \to \Delta^{++} \to \pi^+ + \mathrm{p}$の反応が起る．このような不安定な中間状態を経由した反応の振幅は，3.5節で考察したように，重心系の全エネルギーが$E \cong mc^2$の近傍ではブライト・ウィグナー型振幅(3.26)

$$A(E) \propto \frac{\Gamma/2}{E - mc^2 + i\Gamma/2} \tag{4.16}$$

となる．Γは共鳴状態の崩壊幅である．断面積は

$$\sigma \propto \frac{\Gamma^2/4}{(E - mc^2)^2 + \Gamma^2/4} \tag{4.17}$$

となり，図4.6のように$E = mc^2$にピークをもち，Γの幅で広がった分布となる．

Δには4つの電荷の状態$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$がある．それぞれuuu, uud, udd, dddのクォークで構成されたスピン3/2の状態であり，4種ともほぼ1232 MeV/c^2の質量と$\Gamma = 120$ MeVの崩壊幅をもつ．

これらバリオン共鳴のほかに，クォーク・反クォーク系のメソン共鳴も存在する．たとえば，$\mathrm{p} + \pi \to \mathrm{p} + \pi_1 + \pi_2$の非弾性散乱反応の断面積を$\pi_1, \pi_2$の重心系$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{0})$でのエネルギー$E = E_1 + E_2$の関数として見ると，同様のピークがいくつか現れる．最初に現れるのはρメソンと呼ばれ，質量$m_\rho \sim$ 770 MeV/c^2，崩壊幅$\Gamma = 152$ MeVをもつ．πメソンと同様に3種類の荷電状態$\rho^\pm, \rho^0$がある．クォーク組成はπと同じ(4.13)であるが，スピンが1のベクトル粒子である．終状態に3個のπが生成される$\mathrm{p} + \pi^- \to \mathrm{n} + \pi + \pi + \pi$反応を調べると，$\omega$メソンの鋭いピークが現れる．これもスピンは1だが，電荷は中性のもの1種のみであり，クォーク組成は$(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} + \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})/\sqrt{2}$，質量$m_\omega = 783$ MeV/c^2，崩壊幅は$\Gamma = 8.4$ MeVである．ρメソンやωメソンは強い相互作用によりそれぞれ2個および3個のπメソンに崩壊する．

共鳴状態の粒子のエネルギー準位は強い相互作用によって定まっているが，Δやρあるいはωのように崩壊も強い相互作用によって起る場合は，それらの寿命は非常に短くなる．崩壊幅100 MeVは寿命に換算するとおよそ10^{-23} secであり，これに光速をかけたものはほぼ10^{-15} m，すなわち，これらの共鳴状態の粒子は生成されてから崩壊するまでにハドロンの大きさくらいの距離しか走らない．

自習問題

[1]　$p + \pi^- \to \Delta^0 \to n + \pi^0$ の反応におけるクォークの流れの図を描け.

コラム：素粒子物理学のあけぼの

素粒子物理学の誕生は，1932年のチャドウィックによる中性子発見の年とされている．19世紀末にトムソンによって発見されていた電子と，1919年にラザフォードが特定した陽子に加えて，この時代の「基本構成子」が出そろったわけである．当時の実験は，放射性物質から出る放射線を他の物質に照射して反応を見るのが基本であったが，宇宙線粒子による反応の重要性も認識されていた．その代表例は，ウィルソンの霧箱を使った，アンダーソンによる1932年の陽電子の発見である．ニュートリノは1930年にパウリによって，β崩壊の背後に潜む「見えない粒子」として導入され，1934年のフェルミによる理論の定式化を通して，その存在が確信されるようになった．このような時代背景の中で1935年に湯川秀樹は，核力を伝える粒子として，π粒子を提案した．π粒子は1947年にパウエルによって，宇宙線反応をとらえる写真乾板の中で，μ粒子とともに発見された．

このように，素粒子物理学の黎明期における実験手段は，放射線及び宇宙線の利用に限られていた．極めて制約された条件の下で，いろいろと工夫をこらして実験が行われた．新たな道への礎は，コッククロフトとウォルトンによる加速器の開発であった．静電気を利用して荷電粒子を加速する装置で，奇しくも中性子が発見された1932年に，陽子を加速してリチウムに衝突させ，2個のヘリウムに分裂させることに成功している．その後加速器の性能は急速に改善され，素粒子実験の主流へとなっていった．エネルギーの増強にともない，1960年代始めまでにsクォークまで含んだハドロンは，共鳴状態まで含めると数えきれないほどの種類が発見されていた．当時はまだ陽子や中性子がクォークからできているとの認識はなかったので，これらの共鳴状態のすべても「素粒子」と見なされる大混乱に陥っていた．この混乱の中から脱して，ハドロンの統一的理解を目指した坂田昌一は，ハドロンが複合粒子であるとする考えを提唱した．その考えの流れの中で，クォークの描像が定着していった．

CHAPTER 5

クォークやグルーオンを見る

ハドロンはいくつかのクォークがグルーオンの力によって束縛された複合系として実現されており，クォークやグルーオンは孤立した粒子として存在することはできない．したがって，クォークやグルーオンを直接見ることはできないが，その痕跡はいろいろなところに現れている．

5.1 ジェット現象

クォークやグルーオンの粒子としての実在を最もあからさまに表している典型的な現象は，ジェット現象と呼ばれる素粒子の高エネルギー衝突反応において起る特徴的な現象である．

素粒子の衝突反応において，衝突のエネルギーを上げていくと，反応の過程でたくさんの粒子が生成され，終状態は一般に多粒子状態になる．核子・核子衝突のようなハドロン反応の場合，反応に最も大きく関与するのは強い相互作用の素過程であるので，終状態に生成される粒子はほとんどバリオンやメソンである．いうまでもなくこれらは「無色」の粒子である．始状態の2粒子の重心系でこの衝突反応を見ると，大多数の反応例においては図5.1のように終状態に生成された粒子の大部分は入射してきた2つの粒子の進行方向に集中して大きなエネルギーをもって出てきて，残りのわずかの粒子が入射方向からはずれた方向に分布する．これは入射してきた2つの粒子が衝突によって破砕し，それぞれがばらばらの多粒子の集まりとなって，一団となって入射方向にそって出てきていると理解される．あるいは，別の言い方をすると，衝突のエネルギーの大部分が入射粒子を高励起状態に持ち上げるのに費やされ，その励起状

態が基底状態にもどるまでに多数の粒子を放出することにより，進行方向に粒子が集中するのである．

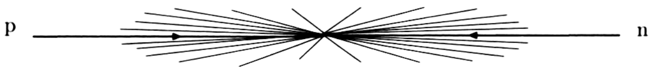


図5.1　高エネルギーハドロン衝突

ところが，時として様相の全く異なった反応が起ることがある．衝突する2つの核子の中のクォークが正面衝突を起し，入射方向から大きく外れた方向に大きなエネルギーをもったまま散乱し，飛び出してくることがある．クォークは単独では安定に存在できないので，これらのクォークはそのエネルギーの一部をクォーク反クォークの対生成に使用して無色のハドロンの集団に化していく．したがって，これらの事例では図5.2のように，衝突で飛び出したクォークの進行方向にたくさんのハドロンが集中してジェットとなって現れる．

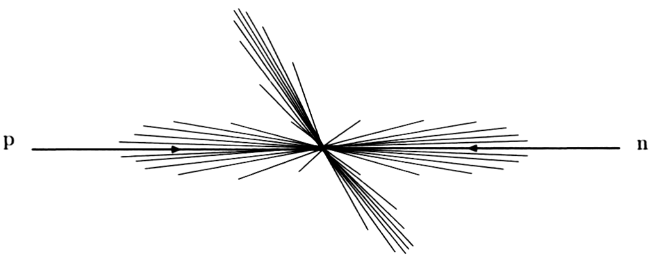


図5.2　高エネルギーハドロン・ジェット

このジェット現象は高エネルギーの様々な素粒子反応において見られるが，一番あからさまに現れるのは，電子・陽電子衝突で終状態がハドロンだけで占められる反応の場合である．この反応は図5.3(左)のように，電子 e^- と陽電子 e^+ が対消滅し，大きなエネルギーをもった1個の仮想光子の中間状態を経由して，クォーク q と反クォーク $\bar{q}$ が対生成されることによって起る．クォークと反クォークは大きなエネルギーをもって反対方向に飛び去って行くが，この時，無色のハドロンになるためにいくつかのクォーク・反クォーク対生成を伴い，たくさんの粒子からなる束（ジェット）が最初にできたクォークと反クォークの方向に形成される（図5.4）．これはジェットが2つなので2ジェット現象と呼ばれる．もっと変わった現象も起きる．中間状態の仮想光子からクォーク q と反クォーク $\bar{q}$ が対生成されるとき，同時に大きなエネルギーをもったグルー

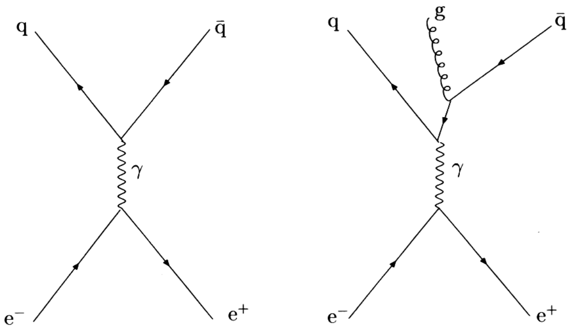


図 5.3 $e^+ + e^- \to q + \bar{q}$，$q + \bar{q} + g$ 素過程

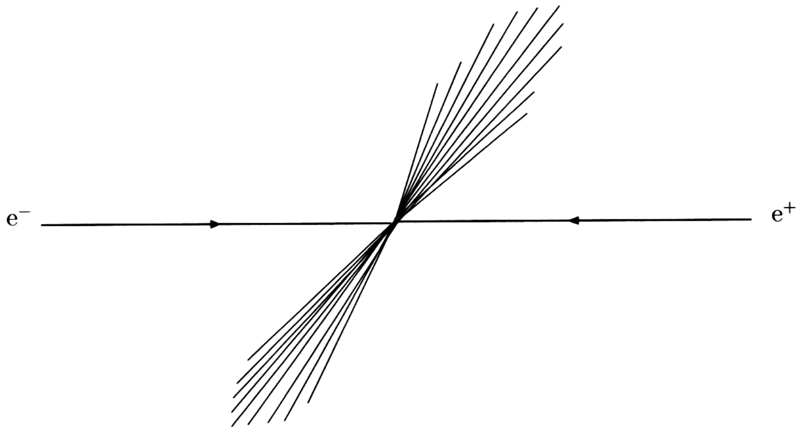


図 5.4 $e^+ + e^- \to 2 -$ ジェット

オン g も生成され，これらの 3 個が全エネルギーをほぼ等しく分けになって飛び出すこともある(図 5.3 右)．ハドロン化の結果，これは図 5.5 のような現象として観測される．これらは 3 ジェット現象と呼ばれる．2 ジェット現象や 3 ジェット現象においてジェットをひとかたまりとして見ると，それらがどの方向にどれくらいの確率で現れるかは，ハドロン化を無視した $e^+ + e^- \to q + \bar{q}$ や $e^+ + e^- \to q + \bar{q} + g$ の反応の角分布でおよそ与えられる．また 2 ジェットと 3 ジェットの起る比率もこれらの比率で与えられる．素過程として後者は前者よりグルーオンを 1 個放出する分だけ多いので，これらの現象からグルーオンとクォークの結合定数 g_s を測定することができる．実験的に観測されているジェットの角分布等は，クォークがスピン 1/2 をもっており，またグルーオ

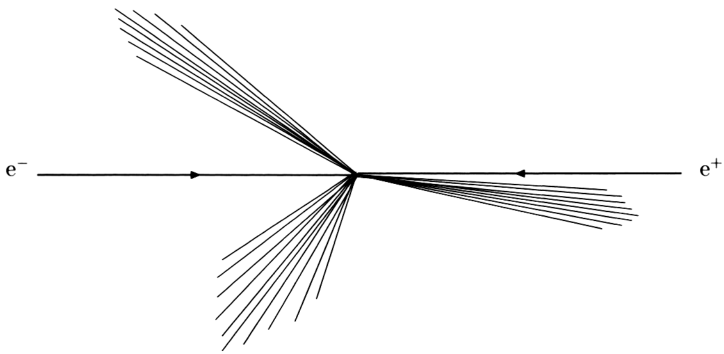


図 5.5　$e^+ + e^- \to 3-$ ジェット

ンがスピン1をもっているとして理論的に期待される分布に一致している．

結合定数 g_s の値は，どれくらいのエネルギーの反応でその大きさを測定するかに依存している．強い相互作用の「微細構造定数」

$$\alpha_s \equiv \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c} \tag{5.1}$$

の値で見ると，$e^+ + e^-$ の重心系のエネルギーが $E_{\mathrm{cm}} = 5$ GeV では $\alpha_s \sim 0.2$ であるが，エネルギーを上げると徐々に減少していき，$E_{\mathrm{cm}} = 30$ GeV くらいの反応では $\alpha_s \sim 0.15$，$E_{\mathrm{cm}} = 100$ GeV では $\alpha_s \sim 0.11$ となる．α_s が示すこのようなエネルギー依存性は量子色力学の際立った特徴であり，その力学的な背景は第7章で明らかになる．

5.2　クォークの色の自由度

クォークやグルーオンが実際に存在していることはジェット現象によって確認されるが，それらがもっている色の自由度，クォークについて3種はどのように現象に現れるかを次に見よう．これが明解に現れるのは，前と同様に，電子と陽電子の対消滅によるハドロンの生成反応である．

前節で見たように，反応のエネルギーが十分大きいときには強い相互作用の α_s はかなり小さな値になっており，仮想光子から対生成されたクォーク q と反クォーク $\bar{\mathrm{q}}$ が強い相互作用によって終状態のハドロンの粒子群に移行していく効果は，生成反応の全断面積にはそれほど大きな影響は与えない．したがっ

て，この断面積はかなり良い近似で，その素過程である q と $\bar{q}$ の対生成の全断面積で与えられる．

$$\sigma_T(e^+ + e^- \to \text{ハドロン}) \simeq \sum_q \sigma_T(e^+ + e^- \to q + \bar{q}) \tag{5.2}$$

ここにクォーク・フレーバー q についての和は，エネルギーの保存則でゆるされるところまで，すなわち $e^+ + e^-$ の全エネルギー E_{cm} が $q\bar{q}$ の対生成を起すのに必要なエネルギーのしきい値 $2m_q c^2$ を越しているものについてのみ取らなければならない．

ところで $\sigma_T(e^+ + e^- \to q + \bar{q})$ の素過程は $\sigma_T(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)$ とほとんど同じである．明らかな違いは，仮想光子からの対生成においてその結合定数が後者は e に対して，前者はクォークの電荷 eQ_q となることである．$\mu^\pm$ とクォークの質量の違いによる影響もあるが，E_{cm} がそれらの質量よりも十分大きいときは，良い近似で質量の効果は無視できる．両者の決定的な違いは，クォークにおいては，各クォーク・フレーバーごとに 3 種の色の自由度があるので終状態の数が μ の場合の 3 倍になることである．

以上の考察により，電子・陽電子対消滅反応におけるハドロンへの全断面積と $\mu^+\mu^-$ 対への断面積の比

$$R = \frac{\sigma_T(e^+ + e^- \to \text{ハドロン})}{\sigma_T(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)} \tag{5.3}$$

はエネルギーが十分高く，クォーク対へのしきい値 $2m_q c^2$ の近傍でないかぎり良い近似で

$$R \simeq 3 \sum_q Q_q^2 \tag{5.4}$$

で与えられることがわかる．たとえば，エネルギーが $2m_c c^2 < E_{cm} < 2m_b c^2$ の領域では，生成されるクォーク対のフレーバーは u, d, s, c なので，R の値は

$$R \simeq 3[(2/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2] = 10/3 \tag{5.5}$$

となる．同様にして，各エネルギー領域で表 5.1 の結果が得られる．実験の結果は図 5.6 のとおりである．低エネルギー領域 (E_{cm} < 3 GeV) ではクォークからハドロンに変化していく過程の強い相互作用の効果が大きく R 比に影響するため，クォークにもとづく単純な計算はあまりうまくいってはいないが，

表 5.1　R 比

$E_{\rm cm} < 2m_{\rm s}c^2$	$R = 5/3$
$2m_{\rm s}c^2 < E_{\rm cm} < 2m_{\rm c}c^2$	$R = 2$
$2m_{\rm c}c^2 < E_{\rm cm} < 2m_{\rm b}c^2$	$R = 10/3$
$2m_{\rm b}c^2 < E_{\rm cm}$	$R = 11/3$

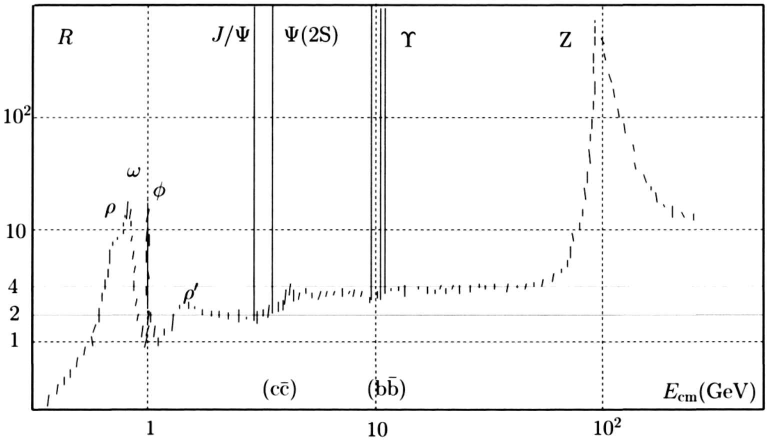


図 5.6　R 比実験データ

それより高いエネルギー領域では理論と実験の一致は持ち込んだ近似からすると驚くほど良い．この一致には上の計算においてクォークの色の自由度による3倍が必須である．すなわちこの結果は，クォークが各フレーバーごとに3種の色の自由度をもっていることを証明しているのである．

R 比 (5.3) の (5.4) からのずれは，終状態のクォークの間の強い相互作用の効果を反映している．したがって，そのずれから強い相互作用の微細構造定数 $\alpha_s = g_s^2/4\pi\hbar c$ を求めることができる．その結果は (5.1) の下に記した値に良く一致している．

CHAPTER 6

ゲージ原理

素粒子の世界には，これまで見てきたように，グルーオンによる強い相互作用，光子による電磁相互作用およびＷとＺによる弱い相互作用が存在している．それぞれの力は大変異なった性格をもっているが，実は驚くべきことに，これらの相互作用には共通の普遍的な原理が背後に潜んでいる．それはゲージ原理と呼ばれる．グルーオンと光子はともにスピンが１で，質量が０のボソンである．ＷとＺは大きな質量をもつが，やはりスピンは１のボソンである．ゲージ原理はこれらのスピン１の粒子が媒介する力の法則を支配している．この章では，電磁相互作用についてその性質を調べることにより，ゲージ原理とは何かを見よう．

6.1 電磁場中の電子とゲージ変換

電子の量子力学を思い出そう．その波動関数を $\psi(x)$ と書く．x は４元座標 x^μ の略記である．$\psi(x)$ は一般には複素数の値をとる関数である．量子力学で勉強してきたところによると，$\psi(x)$ には x によらない定数の位相 ϕ の係数の不定性がある．$\psi(x)$ の代わりに $e^{i\phi}\psi(x)$ を改めて $\psi(x)$ とおいても，あらゆる観測可能な物理量の期待値は不変である．しかし，ある時刻，ある座標点において一旦その位相を何らかのルールで決めてしまったら，すべての時刻，すべての座標点における $\psi(x)$ の位相は一意的に定まってしまう．時空点 x と x' における相対的な位相差は観測可能な物理量とされている．自然法則はそれほど厳格なものなのか．実は基本的な運動法則においてはそうではない．時空の各点各点で $\psi(x)$ の位相は以下で見るように随意に定めることができる．それを可能にするために自然は光子を用意しているのである．

電磁相互作用を無視すると電子の波動関数 $\psi(x)$ はディラック方程式

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - mc\right)\psi(x) = 0 \tag{6.1}$$

に従う．$\psi(x)$ から時空の各点で任意関数 $\Lambda(x)$ により位相を変えたものを

$$\psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)}\psi(x) \tag{6.2}$$

と定義すると，$\psi'(x)$ が満たす方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Lambda(x) - mc\right)\psi'(x) = 0 \tag{6.3}$$

となり，$\psi(x)$ とは異なる方程式に従う．しかし，電子は実際には電荷を帯びており，$\psi(x)$ が従う運動方程式は第3章で与えたように，電磁場 $A_{\mu}(x)$ との相互作用を含んだ

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{e}{c}\gamma^{\mu}A_{\mu}(x) - mc\right)\psi(x) = 0 \tag{6.4}$$

であった．$\psi(x)$ の位相を (6.2) 式で変えたときに，同時に $A_{\mu}(x)$ も

$$A'_{\mu}(x) = A_{\mu}(x) - \hbar\frac{c}{e}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Lambda(x) \tag{6.5}$$

で再定義すると，$\psi'(x)$ と $A'_{\mu}(x)$ が満たす方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + \frac{e}{c}\gamma^{\mu}A'_{\mu}(x) - mc\right)\psi'(x) = 0 \tag{6.6}$$

となり，(6.4) 式と全く同じ形になる．すなわち，電磁場と相互作用しながら運動する電子の運動法則は (6.2) と (6.5) の置き換え（変換）

$$\psi(x) \to \psi'(x)\ ,\ A_{\mu}(x) \to A'_{\mu}(x) \tag{6.7}$$

のもとで不変なのである．これらの変換はゲージ変換と呼ばれ，その変換のもとでの運動法則の不変性はゲージ対称性と呼ばれる．

4元電磁ポテンシャル $A_{\mu}(x)$ から2階の反対称テンソル

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}A_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}A_{\mu}(x) \tag{6.8}$$

を定義すると，この $F_{\mu\nu}(x)$ はゲージ変換 (6.5) のもとで変化しない不変量である．(6.5) の右辺第2項の寄与は (6.8) の右辺の2つの項の間でキャンセルす

る．(1.51),(1.52) で与えた電場 $\vec{E}(x)$ と磁場 $\vec{B}(x)$ はこのテンソルの 6 個の独立な成分

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

になっている．

6.2 ゲージ原理

ゲージ変換は次のようにみなすことができる．$\psi(x)$ は複素数の値をとる関数であるので，ゲージ変換 (6.2) はこの複素平面の上に実軸 Re $\psi(x)$ と虚軸 Im $\psi(x)$ をどの方向にとるか，その「座標軸」の決め方の回転の自由度と見ることができる．「回転角」$\Lambda(x)$ が x の任意の関数であってよいということは，図 6.1 のように，この「座標軸」は 4 次元時空の各点ごとにどのようにとってもよい，自然法則はその取り方によらない普遍的な形をしていることを意味している．自然法則のこのような普遍性をゲージ原理と呼ぶ．当然のことであるが，このような自由度があるときには，各点ごとの「座標軸」の取り方の違いを補正するものが必要である．電磁場 $A_\mu(x)$ はまさにこの補正のために自然界に存在している．ゲージ原理を実現するために自然界に存在している場は，一般にゲージ場と呼ばれる．

このゲージ原理を実現するために，ゲージ場 $A_\mu(x)$ は電子の波動関数 $\psi(x)$ の運動方程式 (6.4) の中に座標微分とともに

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu(x) \tag{6.10}$$

の形で現れている．電磁場と電子の相互作用の形はゲージ原理によって決定されているのである．ゲージ変換のもとで $D_\mu\psi(x)$ は $\psi(x)$ と同じ形の変換

$$D_\mu\psi(x) \to D'_\mu\psi'(x) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{c\hbar}A'_\mu(x)\right)\psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)}D_\mu\psi(x) \tag{6.11}$$

を受ける．D_μ はそれが作用することによって波動関数の変換性を変えないので，共変微分と呼ばれる．

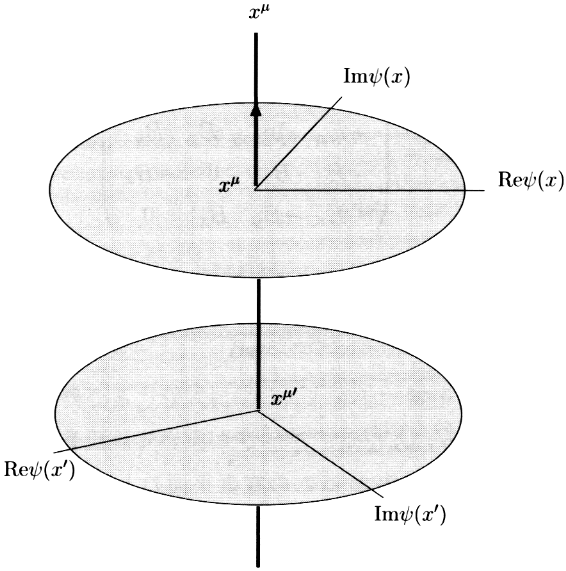


図 6.1　ゲージ原理

これまで電子に話を限ってきたが，ここでほかの荷電粒子について考察しよう．電磁場は電荷をもつすべての粒子と相互作用をする．それらの相互作用は電気力学の法則 (3.3) で定まっている．したがって，電荷 Q をもった粒子の波動関数 $\psi_Q(x)$ に作用する共変微分は

$$D_\mu \psi_Q(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{e}{c\hbar} Q A_\mu(x) \right) \psi_Q(x) \tag{6.12}$$

である．電磁場が (6.5) に従ってゲージ変換したとき (6.12) が共変微分であるということから，$\psi_Q(x)$ のゲージ変換は

$$\psi_Q(x) \longrightarrow \psi'_Q(x) = e^{i\Lambda(x)Q} \psi_Q(x) \tag{6.13}$$

と定まる．これらの位相変換は電荷 Q に付随した $U(1)_Q$ のゲージ変換と呼ばれる．運動方程式（自然法則）はこれらのゲージ変換に対して不変になっている．クォークやレプトンの電磁相互作用はすべて運動方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c}\gamma^\mu Q A_\mu(x) - mc \right) \psi_Q(x) = 0 \tag{6.14}$$

で定まる．

ゲージ対称性をもった理論はゲージ理論と呼ばれ，素粒子の相互作用を記述する基本的な理論である．電磁相互作用は $U(1)_Q$ のゲージ理論である．古典電気力学の運動法則における置き換えルール (1.54) は，ミクロの世界の $U(1)_Q$ のゲージ原理のマクロの世界への反映として実現されている．マクロの世界では電子などの波動関数 ψ は現れないので，その位相変換は見えない．唯一，量子力学との架け橋になっているエネルギーや運動量と座標微分との対応を通して，共変微分 (6.12) が置き換えルール (1.54) を実現している．

$U(1)_Q$ の対称性の意味をもう少し深く理解するために，いろいろな電荷 $Q_{\rm a}$ をもった粒子 a(=1,$\cdots$,n) が複雑に相互作用をしている系を考えよう．それらの波動関数を $\psi_{\rm a}$ とする．それらの運動方程式を

$$K_{\rm a}(D)\psi_{\rm a} = \sum_{\rm b,c=1}^{\rm n} Y_{\rm a}^{\rm bc}\psi_{\rm b}\psi_{\rm c} + \sum_{\rm b,c,d}^{\rm n} X_{\rm a}^{\rm bcd}\psi_{\rm b}\psi_{\rm c}\psi_{\rm d} + \cdots \tag{6.15}$$

と表そう．$K_{\rm a}(D)$ は $\psi_{\rm a}$ がフェルミオンだと $K_{\rm a}(D) = i\hbar\gamma^\mu D_\mu - m_{\rm a}c$，ボソンだと $K_{\rm a}(D) = D_\mu D^\mu + m_{\rm a}^2 c^2/\hbar^2$ である．右辺は相互作用を表しており，$Y_{\rm a}^{\rm bc}, X_{\rm a}^{\rm bcd}$ は結合定数である．たとえば粒子 b と c が対消滅し，それが波源となって a が生成される結合定数が $Y_{\rm a}^{\rm bc}$ である．$U(1)_Q$ 変換のもとでそれぞれの波動関数 $\psi_{\rm a}$ は (6.13) に従って変換する．$U(1)_Q$ 対称性は変換した後の運動方程式が (6.15) と同じ形になることを要請している．左辺は $e^{i\Lambda Q_{\rm a}}$，右辺第 1 項は $e^{i\Lambda(Q_{\rm b}+Q_{\rm c})}$，第 2 項は $e^{i\Lambda(Q_{\rm b}+Q_{\rm c}+Q_{\rm d})}$ の位相で変換するので，これらがすべて等しくなるためには，ゆるされる相互作用は

$$Q_{\rm a} = Q_{\rm b} + Q_{\rm c} \qquad : \ Y_{\rm a}^{\rm bc} \tag{6.16}$$

$$Q_{\rm a} = Q_{\rm b} + Q_{\rm c} + Q_{\rm d} \qquad : \ X_{\rm a}^{\rm bcd} \tag{6.17}$$

に制限される．したがってそれぞれの相互作用の素過程で電荷 Q が加算的に保存される．この電荷の保存則の結果には $U(1)_Q$ の変換関数 $\Lambda(x)$ が座標点 x^μ に依存する関数であることは重要でない．それは定数パラメター Λ の変換で十分である．このように運動方程式が何らかの変換についての対称性を備えていると，その変換に付随した量子数の保存則が実現される．

6.3 電磁場の運動方程式

第1章で残してきたマックスウェル方程式の第2の組 (1.59) に取り組む時がきた．右辺の電荷密度 $\rho(x)$ と電流密度 $\vec{j}(x)$ は連続の方程式 (1.60) を満たしていた．この式は，$c\rho(x)$ と $\vec{j}(x)$ がひとまとまりで4元ベクトルをなしていることを意味している．4元電荷カレント $j^\mu(x)$ を

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) \tag{6.18}$$

と定義すると，(1.60) は

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{6.19}$$

と，相対論的にバランスのとれた形になる．マックスウェル方程式 (1.59) も (6.9) を使って注意深く調べると

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \tag{6.20}$$

と書けることがわかる．(6.19) を満たすカレントは保存カレントと呼ばれる．

量子論における4元電荷カレント $j^\mu(x)$ を構成しよう．それは電荷をもったすべてのクォークやレプトンのカレントの和になっているはずである．まず，電子のカレント $j_{\mathrm{e}}^\mu(x)$ を考察する．電子が正のエネルギーをもって運動している状況を考えよう．その波動関数を $\psi(x)$ とすると，$\psi^\dagger(x)\psi(x)$ は電子の確率密度である．したがって確率密度に電子の電荷をかけたものは電子の電荷密度

$$\rho(x) = -e\psi^\dagger(x)\psi(x) \tag{6.21}$$

のはずである．(6.18) は $c\rho(x)$ が $j^\mu(x)$ の $\mu = 0$ 成分であるといっている．4元ベクトルのギリシャ文字の添字をバランスさせなければならない．$(\gamma^0)^2 = 1$ に注意して

$$\psi^\dagger\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{6.22}$$

と表そう．ここに

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0 \tag{6.23}$$

は (6.22) が4元ベクトルの $\mu = 0$ 成分であることを明示するために複素共役 $\psi^\dagger$ を修正したもので，ディラック共役と呼ばれる．(6.22) をすべての μ に拡

張することにより電子の4元電荷カレント

$$j_{\rm e}^{\mu} = -ce\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \tag{6.24}$$

が求まる（自習問題 [1] 参照）．一旦 $j_{\rm e}^{\mu}$ が求まったら，これまで仮定してきた $\psi(x)$ が電子の正エネルギー解の波動関数であるという条件ははずさなければならない．運動方程式の中に入ってくる $\psi(x)$ は電子に付随した場の力学量である．(6.24) の中には電子のカレントだけでなく，陽電子のカレントも含まれている．

(6.20) の右辺のカレント $j^{\mu}(x)$ は，電荷をもったすべてのクォークとレプトンについて和をとった

$$j^{\mu} = ce\sum\bar{\psi}_Q\gamma^{\mu}Q\psi_Q \tag{6.25}$$

である．したがって，量子論におけるマックスウェル方程式，すなわち光子の運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}F^{\mu\nu} = e\sum\bar{\psi}_Q\gamma^{\nu}Q\psi_Q \tag{6.26}$$

で与えられる．(6.25) のカレント $j^{\mu}(x)$ の保存式 (6.19) は，$\psi_Q(x)$ がディラック方程式 (6.14) を満たすことによって実現されている（自習問題 [2] 参照）．

4元微分の略記 (1.30) $\partial_{\mu} \equiv \partial/\partial x^{\mu}$ を用いると (6.8) の $F_{\mu\nu}$ は $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$，(6.26) は $\partial_{\rho}F^{\rho\nu} = j^{\nu}/c$ と表される．これを ∂^{μ} で微分し μ と ν を取り替えたものを引き算すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}(\partial^{\mu}j^{\nu} - \partial^{\nu}j^{\mu}) &= \partial^{\mu}\partial_{\rho}F^{\rho\nu} - \partial^{\nu}\partial_{\rho}F^{\rho\mu}\\ &= \partial^{\mu}\partial_{\rho}(\partial^{\rho}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\rho}) - \partial^{\nu}\partial_{\rho}(\partial^{\rho}A^{\mu} - \partial^{\mu}A^{\rho})\\ &= \partial^{\rho}\partial_{\rho}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = \partial^{\rho}\partial_{\rho}F^{\mu\nu} \qquad (6.27)\\ \partial^{\mu}\partial_{\mu} &\equiv \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 \qquad (6.28)\end{aligned}$$

が求まる．真空中では $j^{\mu} = 0$ なので，$F^{\mu\nu}$ すなわち電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ は速度 c で伝わる波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2\right)F^{\mu\nu} = 0 \tag{6.29}$$

に従う．この式は質量が $m = 0$ のクライン・ゴルドン方程式 (1.34) の形をしている．電磁場の粒子である光子が0質量であることの反映である．

マックスウェル方程式 (6.26) を $A^\mu(x)$ で表し，$j^\mu(x)$ として電子だけを残すと

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu(x) - \partial_\mu\partial^\nu A^\mu(x) = -e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{6.30}$$

となる．第3章の (3.5) で考察したのと同様に，(6.30) を $A^\mu(x)$ の波動方程式として見ると，右辺は $A^\mu(x)$ の波源を与えている．$\psi(x)$,$\bar{\psi}(x)$ がともに正エネルギー解だとしよう．$\psi(x)$ は電子が x^μ にたどり着く振幅を与えている．他方，$\bar{\psi}(x) \propto \psi^*(x)$ は反粒子，すなわち陽電子が x^μ にたどり着く振幅である．それらが x^μ で対消滅して A^μ の波源となり，光子が生成されて x^μ から飛び去っていく，その素過程が結合定数 $-e$ に比例した確率振幅で起ることを表している．$\bar{\psi}(x)$ が負エネルギー解のときは，陽電子の反粒子すなわち電子が x^μ から飛び去るように見るのだから，電子から光子が放出される素過程を表している．これらの素過程はすでに電子のディラック方程式 (3.5) で表されていたものであるが，それらが光子の運動方程式 (6.30) においても正しく実現されていることがわかる．

6.4　「色」のゲージ対称性

電磁相互作用のゲージ理論を理解したので，ここでクォークの強い相互作用に視点を移そう．第2章で見たように，クォークには6種類のフレーバーがあり，各フレーバーごとに3種類の色の自由度がある．

$$\mathrm{q}^i : \mathrm{q} = \mathrm{u, d, s, c, b, t} \quad i = 1, 2, 3 \tag{6.31}$$

一般に状態が色をもっているかあるいは無色であるかは，色の複素3次元空間の基底（座標軸）を回転したとき状態の記述が変わるか否かで定まるのであった．クォークの状態が

$$\mathrm{q}^i \longrightarrow \sum_{j=1}^{3} U^i{}_j \mathrm{q}^j \tag{6.32}$$

に変わるように座標軸を変換したとき，3個のクォーク $\mathrm{q}, \mathrm{q}', \mathrm{q}''$ から作ったバリオンの状態

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\mathrm{q}^i\mathrm{q}'^j\mathrm{q}''^k \tag{6.33}$$

や，$\mathrm{q}, \bar{\mathrm{q}}'$ のメソンの状態

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{\mathrm{q}}'_i \mathrm{q}^i \tag{6.34}$$

は変換行列 U が

$$\det U = 1 \ , \quad U^\dagger U = U U^\dagger = I \tag{6.35}$$

を満たすとき不変であった．これらの条件を満たす3行3列の行列 U は特殊ユニタリー行列と呼ばれ，それらの集合は数学の言葉で $SU(3)$ という群をなす．

クォークは色をもっているが，それらは無色のバリオンやメソンの状態の中に閉じ込められており，クォークの色の状態を直接観測することはできない．このことは，クォークの強い相互作用を支配する力学が，クォークの色の座標軸の回転に対して不変なゲージ理論なのではないかということを期待させる．実は，まさにそのとおりなのである．強い相互作用のもとでクォーク q^i の波動関数 $\psi_{\mathrm{q}}^i(x)$ が従う運動方程式は，4次元時空の各点各点での $SU(3)$ の変換行列 $U(x)$ によるクォークの色の座標軸の回転

$$\psi_{\mathrm{q}}{}^i(x) \longrightarrow \sum_{j=1}^{3} U^i{}_j(x) \psi_{\mathrm{q}}{}^j(x) \tag{6.36}$$

のもとで不変なゲージ理論によって実現されている．そのゲージ原理を実現するために8種類のグルーオンが自然界に存在し，強い相互作用を産み出している．量子色力学はクォークとグルーオンのゲージ理論である．

6.5 $SU(N)$ 群

量子色力学の詳細に進む前に，ここで少し特殊ユニタリー群について勉強しておこう．N 行 N 列の行列 U で

$$\det U = 1 \ , \tag{6.37}$$

$$U U^\dagger = U^\dagger U = I \ , \quad (I \text{ は } N \text{ 行 } N \text{ 列の単位行列}) \tag{6.38}$$

を満たすものの集合を

$$G = \{ \ U \ ; \ \det U = 1 \ , \ U U^\dagger = U^\dagger U = I \ \} \tag{6.39}$$

と表そう．

一般に集合 G の元 $U_1, U_2 \in G$ に積 $U_1U_2 \in G$ が定義され，積が結合律 $U_1(U_2U_3) = (U_1U_2)U_3$ を満たしていて，$IU = UI = U$ を満たす単位元 I および $UU^{-1} = U^{-1}U = I$ となる逆元 U^{-1} が G に含まれているとき，数学の言葉で G は群をなすという．集合 (6.39) は

$$\det(U_1U_2) = \det U_1 \det U_2 = 1\ ,\ (U_1U_2)^\dagger(U_1U_2) = U_2^\dagger U_1^\dagger U_1U_2 = I \qquad (6.40)$$

だから群である．それは N 次元特殊ユニタリー群 $SU(N)$ と呼ばれる．

次に

$$\mathrm{tr}\ X = 0 \qquad (6.41)$$

$$X = X^\dagger \qquad (6.42)$$

を満たす N 行 N 列の行列 X の集合を

$$R = \{\ X\ ;\ \mathrm{tr}\ X = 0\ ,\ X = X^\dagger\ \} \qquad (6.43)$$

と表す．G の任意の元 $U \in G$ は R の元 $X \in R$ により

$$U = e^{iX} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} X^n \qquad (6.44)$$

と表すことができる．なぜならば，(6.38) は

$$U^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} (X^\dagger)^n = e^{-iX^\dagger} = U^{-1} \qquad (6.45)$$

により (6.42) で満たされている．また，エルミート行列はユニタリー行列で対角化できるので $VXV^\dagger$ が対角行列となるようなユニタリー行列 V $(VV^\dagger = V^\dagger V = I)$ が必ず存在する．この V で U を変換すると

$$VUV^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} VX^nV^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} (VXV^\dagger)^n = e^{iVXV^\dagger} \qquad (6.46)$$

も対角行列になる．この式の両辺の行列式を求めると，左辺は

$$\det(VUV^\dagger) = \det V \det U \det V^\dagger = |\det V|^2 \det U = \det U \qquad (6.47)$$

右辺は

$$\det e^{iVXV^\dagger} = e^{i\mathrm{tr}(VXV^\dagger)} = e^{i\mathrm{tr}X} \tag{6.48}$$

であるから (6.41) によって (6.37) が実現されている．証明はしないがこの逆も成り立つ．このように，任意の $SU(N)$ の行列 U は (6.41),(6.42) を満たす行列 X によって (6.44) で表すことができる．

一般に，集合 G と R が (6.44) で結び付いているとき，G はリー群，R はリー代数と呼ばれる．集合 (6.43) は群 $SU(N)$ のリー代数 $su(N)$ である．R の任意の 2 つの元 X_1, X_2 に実数 a_1, a_2 をかけて和をとった $X = a_1X_1 + a_2X_2$ は (6.41),(6.42) を満たすので R の元である．このような和の性質を備えた集合は実ベクトル空間と呼ばれる．R の 2 つの元 X_1, X_2 の交換関係を

$$[X_1, X_2] \equiv X_1X_2 - X_2X_1 \tag{6.49}$$

で定義すると，$X = i[X_1, X_2]$ は

$$\mathrm{tr}\ X = i\mathrm{tr}(X_1X_2 - X_2X_1) = 0\ , \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned} X^\dagger &= -i(X_1X_2 - X_2X_1)^\dagger = -i(X_2^\dagger X_1^\dagger - X_1^\dagger X_2^\dagger) \\ &= i(X_1X_2 - X_2X_1) = X \end{aligned} \tag{6.51}$$

により R の元となる．

R の任意の元 $X \in R$, G の任意の元 $U \in G$ について $e^{iUXU^{-1}} = Ue^{iX}U^{-1} \in G$ だから，UXU^{-1} は R の元

$$UXU^{-1} \in R \tag{6.52}$$

となる．G の中をパラメター s で連続的かつなめらかに運動する元 $U(s) \in G$ から作った

$$i\ \frac{dU(s)}{ds}U^{-1}(s) \in R \tag{6.53}$$

は R の元である（自習問題 [3] 参照）．

実ベクトル空間としての R の次元は，(6.41),(6.42) を満たす任意の X を実数パラメターを使って表すときに必要なパラメターの数で，それは $d_G \equiv N^2 - 1$ である．d_G は群 G の次元と呼ばれる．R は d_G 次元ベクトル空間であるから

d_G 個の基底行列 T^a $(a = 1, \cdots, d_G)$ を構成することができ，任意の X は実数パラメター θ^a $(a = 1, \cdots, d_G)$ を用いて

$$X(\theta) = \sum_{a=1}^{d_G} \theta^a T^a \tag{6.54}$$

と表すことができる．したがって $SU(N)$ の任意の元は

$$U(\theta) = e^{iX(\theta)} \tag{6.55}$$

と表される．$U(\theta)$ は $SU(N)$ の定義（基本）表現と呼ばれる．

基底行列 T^a は

$$\mathrm{tr}\, T^a = 0\ , \quad T^a = T^{a\dagger} \tag{6.56}$$

を満たすが，さらに規格・直交条件

$$\mathrm{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{6.57}$$

を課しておくと使いやすい．$i[T^a, T^b]$ は R の元だから T^a で展開できる．

$$[T^a, T^b] = i\sum_{c=1}^{d_G} f^{abc} T^c \tag{6.58}$$

展開係数 f^{abc} は実数であり，$SU(N)$ の構造定数と呼ばれる．(6.57) により

$$f^{abc} = -2i\mathrm{tr}([T^a, T^b]T^c) \tag{6.59}$$

である．tr の恒等式 $\mathrm{tr}([T^a, T^b]T^c) = \mathrm{tr}([T^b, T^c]T^a) = \mathrm{tr}([T^c, T^a]T^b)$ により f^{abc} は添字 a, b, c について巡回的，かつ完全反対称

$$f^{abc} = f^{bca} = f^{cab} = -f^{bac} = -f^{cba} = -f^{acb} \tag{6.60}$$

である．

$G = SU(2)$ の次元は $d_{SU(2)} = 3$ である．基底行列 T^a は慣例的に I_a $(a = 1, 2, 3)$ と記される．それらは (1.43) のパウリ行列 σ^a で

$$I_a = \frac{\sigma^a}{2} \quad a = 1, 2, 3 \tag{6.61}$$

と与えられる．交換関係 (6.58) は角運動量の交換関係 (1.9) と同じ形

$$[I_1, I_2] = iI_3,\ [I_2, I_3] = iI_1,\ [I_3, I_1] = iI_2 \tag{6.62}$$

構造定数は

$$f^{abc} = \epsilon^{abc}\ ,\quad \epsilon^{123} = 1 \tag{6.63}$$

である．

$G = SU(3)$ は $d_{SU(3)} = 8$ で，その基底行列 T^a $(a = 1, \cdots, 8)$ としては，パウリ行列を素直に 3 行 3 列に拡張した 8 組の行列 λ^a

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

を用いて

$$T^a = \frac{\lambda^a}{2} \quad a = 1, \cdots, 8 \tag{6.65}$$

としたものが標準的に使われる．λ^a はゲルマン行列と呼ばれる．

$G = SU(N)$ の構造定数 f^{abc} はヤコビの恒等式

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \tag{6.66}$$

により

$$\sum_{d=1}^{d_G} \left(if^{bcd} if^{ade} + if^{cad} if^{bde} + if^{abd} if^{cde} \right) = 0 \tag{6.67}$$

を満たす．d_G 行 d_G 列の行列 F^a $(a=1,\cdots,d_G)$ を

$$(F^a)^{bc} \equiv i f^{bac} \tag{6.68}$$

で定義すると，(6.67) により F^a は T^a の交換関係 (6.58) と同じ交換関係

$$[F^a, F^b] = i \sum_{c=1}^{d_G} f^{abc} F^c \tag{6.69}$$

を満たす．(6.54),(6.55) に対応させて

$$X_{\text{ad}}(\theta) = \sum_{a=1}^{d_G} \theta^a F^a \tag{6.70}$$

$$U_{\text{ad}}(\theta) = e^{iX_{\text{ad}}(\theta)} \tag{6.71}$$

を定義しよう．$U_{\text{ad}}(\theta)$ は $SU(N)$ の随伴表現と呼ばれ，実数の直交行列

$$U_{\text{ad}}{}^*(\theta) = U_{\text{ad}}(\theta)\ , \qquad U_{\text{ad}}{}^T(\theta) = U_{\text{ad}}{}^{-1}(\theta) \tag{6.72}$$

である．

$X(\theta) = \sum_{b=1}^{d_G} \theta^b T^b$ と T^a の交換関係を計算すると

$$[X(\theta), T^a] = \sum_{b,c=1}^{d_G} \theta^b i f^{bac} T^c = \sum_{b,c=1}^{d_G} \theta^b (F^b)^{ca} T^c = \sum_{c=1}^{d_G} T^c (X_{\text{ad}}(\theta))^{ca} \tag{6.73}$$

となる．恒等式（自習問題 [4] 参照）

$$e^{iX(\theta)} T^a e^{-iX(\theta)} = T^a + [iX(\theta), T^a] + \frac{1}{2!}[iX(\theta), [iX(\theta), T^a]] + \cdots \tag{6.74}$$

に (6.73) を繰り返し用いると

$$e^{iX(\theta)} T^a e^{-iX(\theta)} = \sum_{c=1}^{d_G} T^c \left(I_{\text{ad}} + iX_{\text{ad}}(\theta) + \frac{1}{2!}(iX_{\text{ad}}(\theta))^2 + \cdots \right)^{ca} \tag{6.75}$$

（I_{ad} は d_G 行 d_G 列の単位行列），したがって

$$U(\theta) T^a U^{-1}(\theta) = \sum_{c=1}^{d_G} T^c \left(U_{\text{ad}}(\theta)\right)^{ca} = \sum_{c=1}^{d_G} \left(U_{\text{ad}}{}^{-1}(\theta)\right)^{ac} T^c \tag{6.76}$$

と表される．

$SU(N)$ の 2 個の行列 $U(\theta_1), U(\theta_2)$ の積を

$$U(\theta(\theta_1,\theta_2)) = U(\theta_1)U(\theta_2) \tag{6.77}$$

と表すと，$U_{\rm ad}(\theta_1), U_{\rm ad}(\theta_2)$ の積も

$$U_{\rm ad}(\theta(\theta_1,\theta_2)) = U_{\rm ad}(\theta_1)U_{\rm ad}(\theta_2) \tag{6.78}$$

が成り立つ．

自習問題

[1] ψ のローレンツ変換 (1.66) の変換行列 $S(L)$ が $S^{-1}(L) = \gamma^0 S^\dagger(L)\gamma^0$ を満たすことを $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ に注意して確かめよ．これをもとに，(6.23) で定義された $\bar\psi = \psi^\dagger\gamma^0$ が $\bar\psi S^{-1}(L)$，$\bar\psi\gamma^\mu\psi$ が $L^\mu{}_\nu\bar\psi\gamma^\nu\psi$ と変換することを確かめよ．

[2] $\psi_Q(x)$ がディラック方程式 (6.14) を満たすとき，$\bar\psi_Q = \psi_Q^\dagger\gamma^0$ が

$$\bar\psi_Q\left(-i\hbar\gamma^\mu\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} - \frac{e}{c}Q\gamma^\mu A_\mu - mc\right) = 0\ ,\qquad f(x)\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}f(x) \tag{6.79}$$

を満たすことを確かめよ．また，これをもとに，(6.25) のカレント $j^\mu(x)$ が保存の式 (6.19) を満たすことを導け．

[3] パラメター s を含んだ任意の正方行列 $H(s)$ に関する恒等式

$$\frac{d}{ds}e^{H(s)} = \int_0^1 dt\frac{d}{dt}\left(e^{(1-t)H(s)}\frac{d}{ds}e^{tH(s)}\right) \tag{6.80}$$

から

$$\frac{d}{ds}e^{H(s)} = \int_0^1 dte^{(1-t)H(s)}\frac{dH(s)}{ds}e^{tH(s)} \tag{6.81}$$

を導け．さらに，これを用いて (6.53) を証明せよ．

[4] 任意の正方行列 X と A から $A(s) \equiv e^{sX}Ae^{-sX}$ を定義すると，$A(s)$ は微分方程式 $\frac{d}{ds}A(s) = [X, A(s)]$ を満たす．この式の両辺を s のベキで展開し，展開係数を比較することにより

$$e^{sX}Ae^{-sX} = A + [sX, A] + \frac{1}{2!}[sX,[sX,A]] + \frac{1}{3!}[sX,[sX,[sX,A]]] + \cdots \tag{6.82}$$

が成り立つことを確かめよ．

CHAPTER 7

量子色力学

クォークとグルーオンの強い相互作用を支配している量子色力学は，色の座標軸のゲージ変換に対して不変なゲージ理論として実現されており，強い相互作用の様々な素過程はゲージ原理によって定まっている．これまでに，グルーオンによって媒介される強い相互作用が，私たちになじみ深い電磁相互作用についての経験からは予想もできない，不思議な特性を示すことを随所で見てきた．その力学的起源がこの章で明らかになる．

7.1 グルーオンのゲージ変換

クォーク q はスピンが 1/2 のフェルミオンであるから，もし強い相互作用がなければその波動関数 ${\psi_\mathrm{q}}^i(x)$ は 3 色 ($i = 1, 2, 3$) ごとに自由粒子のディラック方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m_\mathrm{q} c \right) {\psi_\mathrm{q}}^i(x) = 0 \tag{7.1}$$

に従う．しかし，6.1 節で電磁相互作用について考察したのと同様に，この運動方程式は色の座標軸の $SU(3)$ のゲージ変換

$${\psi_\mathrm{q}}^i(x) \longrightarrow {\psi'_\mathrm{q}}^i(x) = \sum_{j=1}^{3} {U^i}_j(x) {\psi_\mathrm{q}}^j(x) \tag{7.2}$$

のもとで不変ではない．運動方程式はゲージ変換に対して不変であるためには，ゲージ場であるグルーオン場 $G_\mu(x)$ との相互作用が含まれていなければならない．

電磁相互作用のときの経験から推測して，正しい運動方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{g_s}{c}\gamma^\mu G_\mu(x)-m_\mathrm{q}c\right)\psi_\mathrm{q}(x)=0 \tag{7.3}$$

と予想される．ここに $\psi_\mathrm{q}(x)$ は ${\psi_\mathrm{q}}^i(x)$ を3成分とする縦ベクトルであり，グルーオン場 $G_\mu(x)$ も，色の添字について ${G_\mu}^i{}_j(x)$ を成分とする3行3列の行列である．(7.3) 式の左辺の括弧の中の第1項と第3項には色の添字についての単位行列 $I^i{}_j=\delta^i_j$ がかかっているものと理解する．今後，表式をすっきりさせるために，色の添字は省略する．g_s は強い相互作用の強さ（結合定数），すなわち，クォークがグルーオンを吸収・放出する強さである．

クォークの波動関数を (7.2) に従って $\psi_\mathrm{q}\to\psi'_\mathrm{q}=U\psi_\mathrm{q}$ とゲージ変換したとき，グルーオン場も

$$G_\mu\longrightarrow G'_\mu=UG_\mu U^{-1}+i\hbar\frac{c}{g_s}\frac{\partial U}{\partial x^\mu}U^{-1} \tag{7.4}$$

と変換すると，変換後のクォークとグルーオン場は変換前と同じ形の運動方程式

$$\begin{aligned}&\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{g_s}{c}\gamma^\mu G'_\mu-m_\mathrm{q}c\right)\psi'_\mathrm{q}\\&=\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{g_s}{c}\gamma^\mu\left(UG_\mu U^{-1}+i\hbar\frac{c}{g_s}\frac{\partial U}{\partial x^\mu}U^{-1}\right)-m_\mathrm{q}c\right)U\psi_\mathrm{q}\\&=U\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{g_s}{c}\gamma^\mu G_\mu-m_\mathrm{q}c\right)\psi_\mathrm{q}=0\end{aligned} \tag{7.5}$$

を満たす．運動方程式は色の座標軸の取り方によらない普遍的な形となる．

6.5節で示したように，$SU(3)$ のゲージ変換行列 $U(x)$ は，(6.65) で与えた $SU(3)$ の8個の基底行列 T^a $(a=1,\cdots,8)$ および8個の実ゲージ変換関数 $\Lambda^a(x)$ により

$$U(x)=e^{i\Lambda(x)}\ ,\quad \Lambda(x)\equiv\sum_{a=1}^{8}\Lambda^a(x)T^a \tag{7.6}$$

と表される．グルーオンはゲージ場だから，各ゲージ変換の自由度 $\Lambda^a(x)$ に1対1に対応して，8種の実数グルーオン場 $G^a_\mu(x)$ で

$$G_\mu(x)=\sum_{a=1}^{8}G^a_\mu(x)T^a \tag{7.7}$$

と表現される．したがって，グルーオン場は (6.41),(6.42) の条件

$$G^\dagger_\mu=G_\mu\ ,\quad \mathrm{tr}\ G_\mu=0 \tag{7.8}$$

を満たす．第1式は電磁場 A_μ が実数場であったことの行列の場 G_μ への一般化になっている．第2式は (7.3) の方程式の中で，クォークの色を全く変化させない単位行列に比例する G_μ の成分が存在しないことを意味している．6.4節で調べたリー代数の性質 (6.52),(6.53) により，$G_\mu(x)$ の条件式 (7.8) がゲージ変換 (7.4) のもとで不変であることが保証されている．

(7.3) の G_μ を (7.7) で表すことにより，量子色力学にもとづいてグルーオンと相互作用するクォークの運動の基礎方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{g_s}{c}\gamma^\mu \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a(x) T^a - m_{\mathrm{q}} c\right)\psi_{\mathrm{q}}(x) = 0 \tag{7.9}$$

が得られる．この方程式により，クォーク q^j がグルーオン g^a を吸収あるいは放出して q^i に遷移する結合定数が $g_s(T^a)^i{}_j$ と定まる．

7.2 色電場と色磁場

電磁気学において電場 $\vec{E}$ と磁場 $\vec{B}$ は (6.9) によって2階の反対称テンソル $F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$ で表された．これらは電磁相互作用のゲージ変換に対して不変な量であり，$\vec{E}$ や $\vec{B}$ の2乗は電場や磁場が担うエネルギー密度に比例している．

$$[\text{電磁場のエネルギー}] = \int d\vec{x}^3 \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \tag{7.10}$$

量子色力学においてもグルーオン場により色電場や色磁場 $G_{\mu\nu}$ が生じているはずであるが，それはどのようなものであろうか．グルーオンは色電荷を帯びているので，$G_{\mu\nu}$ は色の座標軸の変換のもとで不変ではありえない．それは色についての3行3列の行列 ${G_{\mu\nu}}^i{}_j$ であり，ゲージ変換のもとで左側の上付き添字 i はクォークの変換 (2.26) と同じ，右側の下付き添字 j は反クォークと同じ変換 (2.29) をするはずである．$U^\dagger = U^{-1}$ だから

$$G_{\mu\nu} \longrightarrow G'_{\mu\nu} = U G_{\mu\nu} U^{-1} \tag{7.11}$$

である．このような変換性をもつ $G_{\mu\nu}$ を構成するのに共変微分は強力な威力を発揮する．電磁場の $F_{\mu\nu}$ が電磁相互作用における共変微分 (6.12) によって

$$[D_\mu, D_\nu] = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{e}{c\hbar}QA_\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} + i\frac{e}{c\hbar}QA_\nu\right]$$
$$= i\frac{e}{c\hbar}Q\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu\right) = i\frac{e}{c\hbar}QF_{\mu\nu} \tag{7.12}$$

と表されることに注目しよう．量子色力学においては共変微分は

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{g_s}{c\hbar}G_\mu(x) \tag{7.13}$$

である．ゲージ変換 (7.2),(7.4) のもとで

$$D_\mu\psi_{\rm q} \to D'_\mu\psi'_{\rm q} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{g_s}{c\hbar}G'_\mu\right)\psi'_{\rm q} = UD_\mu\psi_q = UD_\mu U^{-1}\psi'_{\rm q} \tag{7.14}$$

となる．したがって $[D_\mu, D_\nu]$ の変換は

$$[D_\mu, D_\nu] \longrightarrow [D'_\mu, D'_\nu] = [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} \tag{7.15}$$

となり (7.11) の要請を満たしている．グルーオンの色電場と色磁場は

$$G_{\mu\nu} = -i\frac{c\hbar}{g_s}[D_\mu, D_\nu] \tag{7.16}$$

である．共変微分 (7.13) の表式を代入すると具体的な形として

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}G_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}G_\mu + i\frac{g_s}{\hbar c}[G_\mu, G_\nu] \tag{7.17}$$

が求まる．電磁場の式 (7.12) では A_μ は行列ではなかったので $[A_\mu, A_\nu] = 0$ であるが，(7.17) では G_μ が 3 行 3 列の行列なので $[G_\mu, G_\nu]$ の項が現れている．これはグルーオンが色を帯びていることの反映である．

$G_{\mu\nu}(x)$ は $G_\mu(x)$ と同様に条件

$$G^\dagger_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}\ , \quad {\rm tr}\ G_{\mu\nu} = 0 \tag{7.18}$$

を満たすので，$SU(3)$ の基底行列 T^a で展開できる．

$$G_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{8} G^a_{\mu\nu}T^a \tag{7.19}$$

$$G^a_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}G^a_\nu - \frac{\partial}{\partial x^\nu}G^a_\mu - \frac{g_s}{\hbar c}\sum_{b,c=1}^{8} f^{abc}G^b_\mu G^c_\nu \tag{7.20}$$

7.3 グルーオン場の運動方程式

グルーオンの色電場や色磁場が空間中に分布すると，それは当然エネルギーを担う．エネルギーは 4 次元時空の中の物理量であり，色の空間の座標軸の取り方とは無関係な物理量である．すなわちそれらはゲージ変換に対して不変な物理量のはずである．電磁場の時と同様，エネルギー密度は $G_{\mu\nu}$ の 2 乗に比例しているはずだから，後はゲージ不変な量を取り出す操作を行えばよい．それは単純で，2 つの $G_{\mu\nu}$ の行列としての積を作り，そのトレース（対角成分の和）tr を求めればよい．ゲージ変換 (7.11) の効果は tr をとることによって完全に打ち消される．色電場のエネルギー密度は $\mathrm{tr}\sum_i G_{0i}G_{0i}$，色磁場のエネルギー密度は $\mathrm{tr}\sum_{i<j} G_{ij}G_{ij}$ である．(7.19) および (6.57) により，グルーオン場が担うエネルギーは

$$[\text{グルーオン場のエネルギー}] = \int d^3\vec{x}\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{8}\left(\sum_i G^a_{0i}G^a_{0i} + \sum_{i<j} G^a_{ij}G^a_{ij}\right) \tag{7.21}$$

である．

この表式は電磁場のエネルギー (7.10) と見掛けの上ではほとんど同じであるが，実際には，大変な違いがある．$G^a_{\mu\nu}$ を (7.20) に従ってグルーオン場 G^a_μ で表して上の式に代入すると，このエネルギーには G^a_μ の 3 次や 4 次の項が含まれている．電磁場のエネルギーの場合には A_μ の 2 次の項だけしか現れないが，これは電磁場の重ね合わせの原理と関係している．エネルギーが A_μ の 2 次ということは A_μ の運動方程式であるマックスウェル方程式 (6.26) の左辺が，A_μ について 1 次しか含まないことに反映されている．真空中でのマックスウェル方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}F^{\mu\nu} = 0 \tag{7.22}$$

で与えられ，$A^{(1)}_\mu$ と $A^{(2)}_\mu$ がともに (7.22) の解であれば $A^{(1)}_\mu + A^{(2)}_\mu$ も (7.22) の解となる．グルーオン場ではこうはならない．

真空中のマックスウェル方程式 (7.22) は電磁場の共変微分 (6.10) を用いて $[D_\mu, F^{\mu\nu}] = 0$ と表される．したがって，ゲージ対称性を満たしたグルーオン場の運動方程式も，クォークとの相互作用がなければ，共変微分 (7.13) を用

いて

$$[D_\mu, G^{\mu\nu}] = 0 \tag{7.23}$$

と表されるはずである．ゲージ変換のもとで $[D_\mu, G^{\mu\nu}] \to U[D_\mu, G^{\mu\nu}]U^{-1}$ と，望ましい変換をする．左辺を基底行列 T^a で展開すると

$$\begin{aligned}[D_\mu, G^{\mu\nu}] &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}G^{\mu\nu} + i\frac{g_s}{\hbar c}[G_\mu, G^{\mu\nu}] \\ &= \sum_{a=1}^{8}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}G^{a\mu\nu} - \frac{g_s}{\hbar c}\sum_{b,c=1}^{8} f^{abc}G_\mu^b G^{c\mu\nu}\right)T^a \end{aligned} \tag{7.24}$$

となる．したがって(7.23)は G_μ^a の1次だけでなく，2次や3次の項まで含んでいる．重ね合わせの原理は成り立たない．これはグルーオン同士の間に相互作用が存在していることを意味する．(7.21)のエネルギーの G_μ^a について3次と4次の項はグルーオンの自己相互作用のエネルギーである．これらの相互作用によりグルーオンには図7.1のように，電磁相互作用には存在しなかった素過程が現れる．左の図はグルーオンがグルーオンを吸収あるいは放出して色の状態が変化する素過程であり，その強さは結合定数 g_s に比例している．右の図はグルーオンが2個のグルーオンを同時に吸収あるいは放出する，全部で4個のグルーオンが関与した素過程であり，その強さは結合定数の2乗 g_s^2 に比例する．これらのグルーオンの自己相互作用の存在は，強い相互作用が電磁相互作用と異なる決定的な特質である．

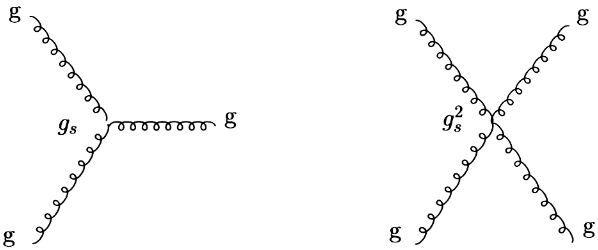


図7.1　グルーオン相互作用の素過程

グルーオンの運動方程式はクォークとの相互作用項も含む．マックスウェル方程式(6.26)の右辺が4元電荷カレント $\frac{1}{c}j^\nu$ であるように，(7.23)の右辺をクォークによる4元色電荷カレントとしたものがグルーオンの正確な運動方程式である．マックスウェル方程式(6.26)の導出から推測できるように，グルー

オンの運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}G^{a\mu\nu}-\frac{g_s}{\hbar c}\sum_{b,c=1}^{8}f^{abc}G_\mu^bG^{c\mu\nu}=g_s\sum_{\mathrm{q}}\bar{\psi}_{\mathrm{q}}\gamma^\nu T^a\psi_{\mathrm{q}} \tag{7.25}$$

である（自習問題[1],[2]参照）．この運動方程式はクォーク q^j がグルーオン g^a を吸収あるいは放出して q^i に遷移する結合定数 $g_s(T^a)^i{}_j$ を正しく表現している．

色の $SU(3)$ のゲージ原理は，クォークの運動方程式 (7.9) およびグルーオンの運動方程式 (7.25) を通して，クォークとグルーオンの強い相互作用の素過程を 1 個の結合定数 g_s によって完全に定めている．

7.4 量子効果

電磁相互作用は古典的にはマックスウェルの電磁気学で記述されるが，ミクロな世界の現象まで取り扱おうとすると，電子や電磁場等すべてを量子力学的な場の演算子とする場の量子論にもとづかなければならない．そこではあらゆる場の量子的な揺らぎがいろいろな物理量に影響を及ぼしてくる．距離 r だけ離れた電子と陽電子の間のクーロン・ポテンシャル $-e^2/4\pi r$ は場の量子論の観点からすると，1 個の光子が 2 粒子間で交換される過程によって実現される．しかし量子論の効果はこれだけにとどまるわけではない．図 7.2 のように電磁相互作用の素過程をいくつか組み合わせたいろいろな過程が電子・陽電子間ポテンシャルに効いてくる．それらは素過程をいくつ含んでいるかによって結合定数 e のベキによって展開される．第 2 項は電荷を帯びたクォークやレプトン f とそれらの反粒子 $\bar{\mathrm{f}}$ が仮想粒子の状態で仮想光子から対生成し，再び仮想光子へと対消滅している過程であり，これは e^4 の寄与を与える．これら高次の

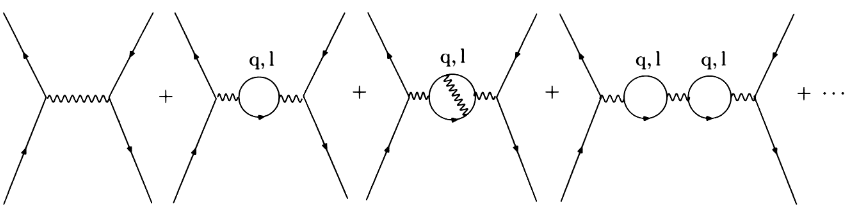


図 7.2 電子・陽電子ポテンシャルの過程

過程は第１項の $1/r$ とは異なる r 依存性をもっているが，これらをすべて加え合わせたものを

$$V_{\text{eff}}^{\text{QED}}(r) = -\frac{e(r)^2}{4\pi r}\ , \qquad \alpha(r) \equiv \frac{e(r)^2}{4\pi\hbar c} \tag{7.26}$$

と表そう．$e(r)$ は直観的には距離 r だけ離れたところから見た電子の電荷（の絶対値）とみなすことができる．$r\to\infty$ の極限での $e(r)$ がマクロなスケールで定義された電子の電荷を表すことになる．

場の量子論に従って $\alpha(r) \equiv e(r)^2/4\pi\hbar c$ を求めると，それは図 7.3 のように，r が大きくなるとともに減少していく関数形をしている．$r \to 0$ の極限での $e(r)$ が電子の真の電荷を与えるとみなすと，この振舞いは見かけの電荷が真の電荷より小さいことを意味している．これは，荷電粒子があると，それがその周りに作り出す電場によって，周りの真空が量子効果を通して図 7.4 のように偏極し，もともとの電荷を一部打ち消して小さくしていると解釈される．この現象は真空偏極と呼ばれ，場の理論的には，真空が誘電体の性質をもっていることを示している．

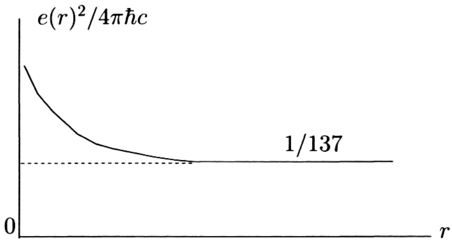


図 7.3　電子・陽電子の $e(r)^2/4\pi\hbar c$

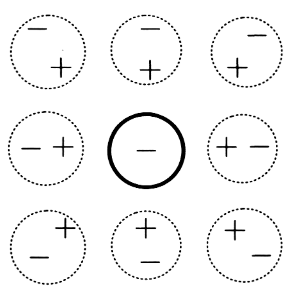


図 7.4　QED の真空偏極

これらの状況を数式を使ってもう少し定量的に考察しよう．$\alpha(r)$ の r についての変化率を $\alpha(r)$ のベキで展開して

$$-r\frac{d}{dr}\alpha(r) = b(r)\alpha(r)^2 + O(\alpha(r)^4) \tag{7.27}$$

と表そう．$\alpha(r)$ に r 依存性を与えるのは図 7.2 の第 2 項の e^4 以降の真空偏極の効果だから (7.27) の右辺の展開は $\alpha(r)^2$ から始まる．$\alpha(r)$ は無次元量だから係数関数 $b(r)$ も無次元量である．真空偏極はレプトンやクォークの対生成 $\mathrm{f\bar{f}}$ によって，エネルギーが保存しない中間状態を通して生じるので，それはエネルギーと時間の間の不確定性関係 $\Delta E \Delta t \simeq \hbar$ により，$\Delta t \simeq \hbar/\Delta E \simeq \hbar/m_{\mathrm{f}}c^2$ の時間しか持続しない．したがってその効果が及ぶ領域は，Δt に光速 c をかけた $c\Delta t \simeq \hbar/m_{\mathrm{f}}c$ 以内，すなわち f のコンプトン波長 $\lambda_{\mathrm{f}} = \hbar/m_{\mathrm{f}}c$ より短い領域に限られる．したがって $r < \lambda_{\mathrm{f}}$ であれば，その真空偏極は $\alpha(r)$ の r 依存性に寄与するが，$\lambda_{\mathrm{f}} < r$ の真空偏極は r 依存性を出さない．

r が一番軽い荷電粒子である電子のコンプトン波長 $\lambda_{\mathrm{e}} = 3.86 \times 10^{-13}$ m より大きな領域 $r > \lambda_{\mathrm{e}}$ では，真空偏極の r 依存効果を引き起こす粒子はないので $b(r) = 0$ になる．したがって，$\alpha(r)$ は r によらない定数，すなわち，マクロなスケールで測定される値 $\alpha(\infty) = 1/137.036$ になる．

r が電子の次に軽い荷電粒子である u クォークの λ_{u} までの領域 $\lambda_{\mathrm{u}} < r < \lambda_{\mathrm{e}}$ では，電子と陽電子による真空偏極だけが $b(r)$ に寄与する．$b(r)$ は無次元量だから，この領域の中ではほぼ定数になる．$r < \lambda_{\mathrm{u}}$ になると $\mathrm{u\bar{u}}$ の対生成が加わってくる．

このようにして，r を徐々に小さくしていくと，クォークやレプトン f が質量の軽い順に順次 $b(r)$ に寄与してくる．その強さはそれらの電荷の 2 乗 Q_{f}^2 に比例するので，係数関数 $b(r)$ は $r = \lambda_{\mathrm{f}}$ で Q_{f}^2 に比例した飛びをもつ階段関数になる（正確にいうとなめらかにつながった関数であるが，かなり良い精度で階段関数で近似できる）．場の量子論にもとづいて $b(r)$ を求めると

$$b(r) = \frac{2}{3\pi}\sum_{\lambda_{\mathrm{f}}>r} Q_{\mathrm{f}}^2\,, \qquad \lambda_{\mathrm{f}} \equiv \frac{\hbar}{m_{\mathrm{f}}c} \tag{7.28}$$

が得られる．f の和は，それらのコンプトン波長 λ_{f} が r より長いものについてのみとられる．クォークについて和をとるときは，3 つの色の自由度も含めなければならない．微分方程式 (7.27) は繰り込み群の方程式と呼ばれる．

(7.27) の $\alpha(r)$ の高次の項は大変小さいので，ほとんど無視してよい．$b(r)$ が定数となる各区間でこの微分方程式を解くと

$$\frac{1}{\alpha(r)} - [\text{積分定数}] = b \log r \tag{7.29}$$

が得られる．fを軽いほうから順に $i = 1, 2, 3, \cdots$ と番号を振り，$\lambda_{i+1} < r < \lambda_i$ の領域の解を $\alpha_i(r)$，$b(r) = b_i$ とし，境界条件を $\alpha_i(\lambda_i) = \alpha_i$ とおくと

$$\alpha_i(r) = \frac{\alpha_i}{1 + b_i \alpha_i \log(r/\lambda_i)} , \qquad \lambda_{i+1} < r < \lambda_i \tag{7.30}$$

となる．これに $r = \lambda_{i+1}$ における接続の条件

$$\alpha_i(\lambda_{i+1}) = \alpha_{i+1} \tag{7.31}$$

を課して $\alpha_i(r)$ を順順につないでいくことによってすべての領域の $\alpha(r)$ が求まる．その結果が図 7.3 である．

$\alpha(r)$ は r を小さくしていくと徐々に増大するが，その変化率はそれほど大きくはない．Z ボソンのコンプトン波長 $\lambda_Z = 2.164 \times 10^{-18}$ m のあたりでも $\alpha(\lambda_Z) \simeq 1/128$ 程度である．r を極端に小さくすると，ついには発散することになるが，そのようなことが起るのは $r \sim 0.699 \times 10^{-83}$ m という極めて極微の距離である．そのような領域まで量子電気力学が成り立つわけではない．超極微の世界を支配するさらに基本的な力学に移り換わるものと予測されている．

量子色力学に進もう．量子色力学において真空はどのような性質をもっているであろうか．クォークと反クォークの間のポテンシャル・エネルギーは 1 個のグルーオンの交換によって $-g_s^2/4\pi r$ となるが，量子効果によってこれは補正を受ける．それを (7.26) と同様に

$$V_{\text{eff}}^{\text{QCD}}(r) = -\frac{g_s(r)^2}{4\pi r} , \qquad \alpha_s(r) \equiv \frac{g_s(r)^2}{4\pi \hbar c} \tag{7.32}$$

と表そう．$g_s(r)$ が見かけの色電荷である．強い相互作用の素過程は，前に見てきたように，クォークからのグルーオンの吸収や放出だけでなく，グルーオンからグルーオンが吸収・放出されたり，グルーオンの 4 個の相互作用がある．これらの素過程の組合せにより，量子効果は図 7.5 のように，電磁相互作用の時には存在しなかったタイプの過程も効いてくる．図 7.5 の第 2 項は $q\bar{q}$ の対

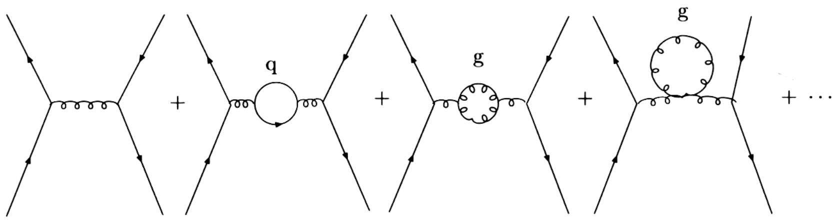


図 7.5 クォーク・反クォークポテンシャルの過程

生成と対消滅であるが，これは電磁相互作用の図 7.2 の第 2 項のクォークやレプトンの対生成・対消滅とほとんど同じ効果を $g_s(r)$ に与える．第 3 項と第 4 項がグルーオンの自己相互作用による過程で，電磁相互作用にはなかったものである（正確には，付録の A.6 で現れるゴースト（幽霊）の対生成・対消滅も含めなければならない）．

(7.27) と同じように $\alpha_s(r)$ についての繰り込み群の方程式を

$$-r\frac{d}{dr}\alpha_s(r) = b_s(r)\alpha_s(r)^2 + O(\alpha_s(r)^4) \tag{7.33}$$

と表そう．係数関数 $b_s(r)$ は

$$b_s(r) = \frac{1}{3\pi}\sum_{\lambda_q > r} 1 - \frac{11}{2\pi}\ , \qquad \lambda_q \equiv \frac{\hbar}{m_q c} \tag{7.34}$$

で与えられる．(7.34) の第 1 項は $q\bar{q}$ による真空偏極の寄与である．クォークの色の自由度は係数の中に含められているので，q の和はクォーク・フレーバーについてのみとればいい．第 2 項がグルーオンによる真空偏極の寄与である．それは第 1 項と符合が逆で，とても大きな係数で寄与している．符号が逆になるのは，グルーオンがスピン 1 のベクトル粒子であることによっている．係数が大きいのは，それらが 8 種類もの色の自由度をもっているためである．この結果 $b_s(r)$ は 6 種のクォーク・フレーバーすべてを含めても負である．

(7.33) の解 $\alpha_s(r)$ は形式的には (7.30) と同じであるが，b_i の符号が負であることによって，その r 依存性は電磁相互作用の $\alpha(r)$ と逆になる．見かけの色電荷 $g_s(r)$ は電磁相互作用の $e(r)$ とは逆の振舞いを示し，図 7.6 のように距離 r の増加とともに大きくなっていく．グルーオンは 0 質量なので，そのコンプトン波長は無限大である．そのため，グルーオンによる真空偏極の効果は r をどこまで大きくしてもとぎれることがない．量子色力学において真空は反誘電

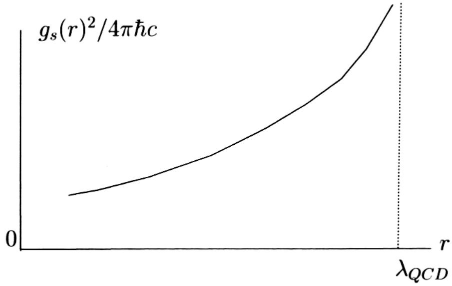


図7.6　クォーク・反クォークの $g_s(r)^2/4\pi\hbar c$

体の性質を示し，見かけの色電荷は真の色電荷より大きくなる．そのため r が大きくなると相互作用は強くなり強結合の理論になる．逆に r を小さくしていくと相互作用の強さは弱くなり，クォークはあたかも自由粒子であるかのように振る舞う．運動量空間にフーリエ変換した反応振幅で見ると，強い相互作用はエネルギーの低い反応ではとても強いが，反応のエネルギーが高くなると相互作用の強さは小さくなる．これはまさに第5章のジェット現象のところで見たことである．量子色力学のこのような特質は漸近自由性と呼ばれる．

r がZボソンのコンプトン波長 $r = \lambda_{\mathrm{Z}} (= 2.164 \times 10^{-18}$ m) での $\alpha_s(r)$ の測定値は

$$\alpha_s(\lambda_{\mathrm{Z}}) = 0.118 \tag{7.35}$$

が得られておりかなり小さな値である．$r < \lambda_{\mathrm{Z}}$ ではさらに小さくなる．$r > \lambda_{\mathrm{Z}}$ の $\alpha_s(r)$ は，r の小さい方から大きい方に向かって接続条件 (7.31) を順次適用することによって求まる．r を核子の大きさの程度 $r \sim 10^{-15}$ m までつないでくると，真空偏極に寄与するのはu, d, sの3クォーク・フレーバーのみとなる．その領域での $\alpha_s(r)$ は

$$\alpha_s(r) = \frac{2\pi}{9} \frac{1}{\log(\lambda_{QCD}/r)}, \qquad r \sim 10^{-15}\ \mathrm{m} \tag{7.36}$$

と表すことができる．積分定数 λ_{QCD} は $\alpha_s(r)$ を $r = \lambda_{\mathrm{b}}$, $r = \lambda_{\mathrm{c}}$ で接続することにより

$$\lambda_{QCD} = \lambda_{\mathrm{Z}} \left(\frac{m_{\mathrm{Z}}^2}{m_{\mathrm{c}} m_{\mathrm{b}}} \right)^{2/27} \exp \left[\frac{2\pi}{9\alpha_s(\lambda_{\mathrm{Z}})} \right] \tag{7.37}$$

と求まる．(7.35) およびb, cクォークの質量の値 $m_{\mathrm{b}} \simeq 4$ GeV/c^2, $m_{\mathrm{c}} \simeq 1.3$ GeV/c^2 を代入すると

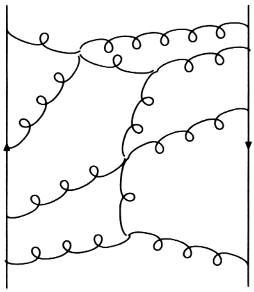


図 7.7 クォーク・反クォークポテンシャルへの高次効果

$$\lambda_{QCD} \simeq 1.4 \times 10^{-15}\ \mathrm{m} \tag{7.38}$$

が得られる.

(7.36) は，r がハドロンの典型的な長さのスケール $\lambda_{QCD} \simeq 10^{-15}$ m に近づくと強い相互作用の結合定数 $\alpha_s(r) = g_s(r)^2/4\pi\hbar c$ がとても大きくなることを示している．この領域では繰り込み群の方程式 (7.33) の高次の項も無視できなくなる.

クォークと反クォークが長距離離れると結合定数が大きくなるため，図 7.5 のような過程だけでなく図 7.7 のようなさらに複雑な過程も大きく寄与してくる．このためポテンシャルの g_s のベキによる展開は意味をなさなくなる．量子色力学は長距離あるいは低いエネルギーの反応においては，量子論における相互作用の摂動展開が適用できない非摂動的理論となる.

電磁相互作用と強い相互作用のポテンシャル・エネルギーの違いは直観的には図 7.8 で理解できる．電磁相互作用においては r が十分大きいと，クーロン

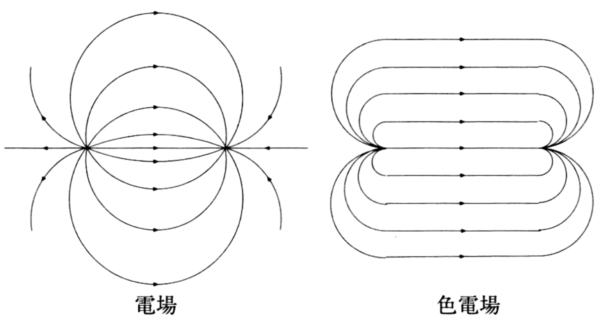


図 7.8 電場と色電場の比較

の法則に従って荷電粒子の間を結ぶように電場が生じる．粒子から放たれる全電束は粒子の電荷で固定されているので，その電束を空間的にどのように分布させればエネルギー的に一番得をするかで電場分布が定まる．電場は無限遠まで広がっていた方が得をする．強い相互作用におけるグルーオンの色電場はグルーオン間にもポテンシャル・エネルギーが生じるので，色電場が空間にあまり大きく広がるとエネルギーが高くなってしまう．色電場はある程度小さな領域に絞り込まれた方が得である．別の言い方をすると，真空は量子色力学に関しては反誘電性を示すため，色電場をできるだけ排斥し，せまい領域に閉じ込めようとする性質をもっている．このため，r を大きくすると色電場の束は太さをほぼ一定に保って，長さのみが伸びていく．したがって色電場によるエネルギーは長さ r に比例するようになり，第2章の図2.4に示したようなグルーオン・ポテンシャルが実現されている．

量子色力学のこのような特異な性質のために，色をもった粒子は単独では真空中に存在することができず，いくつか集まって全体で無色となったハドロンが実現されているのである．

自習問題

[1] グルーオン場の運動方程式 (7.25) の右辺に T^a をかけて $a = 1, \cdots, 8$ の和をとったものを $\frac{1}{c}J^\nu$ と表そう．(7.24) により運動方程式は $[D_\mu, G^{\mu\nu}] = \frac{1}{c}J^\nu$ と書ける．(6.76) の関係式から，ゲージ変換 (7.2) のもとで J^ν が $[D_\mu, G^{\mu\nu}]$ と同じ変換 $J^\nu \to UJ^\nu U^{-1}$ をすることを確かめよ．したがって，グルーオン場の運動方程式はゲージ対称である．

[2] $G^{\mu\nu}$ が (7.16) で表されていること，およびヤコビの恒等式 (6.66) を注意することにより $[D_\nu, [D_\mu, [G^{\mu\nu}]]] = 0$ が成り立つことを確かめよ．したがって，[1] の J^ν も $[D_\nu, J^\nu] = 0$ を満たさねばならない．これは4元電荷カレントの保存式 (6.19) に対応する4元色電荷カレントの保存式である．ψ_{q} がディラック方程式 (7.9) に従うこと，および $\bar{\psi}_{\mathrm{q}}$ が (6.79) の eQA_μ を $g_s \sum_{a=1}^{8} G_\mu^a T^a$ に置き換えた運動方程式に従うことに注意して，この保存式が実現されていることを確かめよ．

[3] $\alpha_s(r)$ の繰り込み群の方程式 (7.33) の解を (7.35) の条件のもとに $r = \lambda_{\mathrm{b}}$ と $r = \lambda_{\mathrm{c}}$ で接続することにより (7.36), (7.37) を導け．

CHAPTER 8

空間反転と荷電共役

自然界に起っている多種多様な物理現象の器であるこの4次元時空は，それ自体いろいろな対称性を備えており，それに付随した保存則が実現されている．この章では，それらの対称性の中でも特別な性格をもった，空間反転の対称性および荷電共役対称性について，それらが強い相互作用と電磁相互作用においてどのような形で実現されているのかを調べよう．

8.1 空間反転

4次元時空が備えている対称性のうち，時間の一様性はエネルギーの保存則，空間の一様性は運動量の保存則，空間の等方性は角運動量の保存則を実現している．これらの保存則は厳密に成り立っている．たとえば，z 軸回りの回転を考えてみよう．時刻 t における任意の量子状態 $|\Psi(t)\rangle$ を角度 ϵ だけ回転した状態を $|\Psi_\epsilon(t)\rangle$ と表そう．これらは回転のユニタリー演算子 $\mathcal{T}_\epsilon$ により

$$|\Psi_\epsilon(t)\rangle = \mathcal{T}_\epsilon|\Psi(t)\rangle \tag{8.1}$$

で結び付けられる．z 軸回りで，角度 ϵ と δ の2度の回転を行うと，それは，角度 $\epsilon+\delta$ の1度の回転と等しいので，$\mathcal{T}_\epsilon\mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_{\epsilon+\delta}$ である．この条件を満たす $\mathcal{T}_\epsilon$ は何らかのエルミート演算子 $\mathcal{J}_z$ により

$$\mathcal{T}_\epsilon = e^{-\frac{i}{\hbar}\epsilon\mathcal{J}_z} \tag{8.2}$$

と表すことができる．空間が等方的であるということは，$|\Psi(t)\rangle$ で表されている状態の運動が実現されるのであれば，$|\Psi_\epsilon(t)\rangle$ で表される状態の運動も等し

く実現されること，すなわち，それらの運動がともに同じシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \mathcal{H}|\Psi(t)\rangle\ ,\quad i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi_\epsilon(t)\rangle = \mathcal{H}|\Psi_\epsilon(t)\rangle \tag{8.3}$$

によって定まっていることを意味している．これは，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の変換

$$\mathcal{T}_\epsilon^{-1}\mathcal{H}\mathcal{T}_\epsilon = \mathcal{H} + \frac{i}{\hbar}\epsilon[\mathcal{J}_z, \mathcal{H}] + \cdots \tag{8.4}$$

が回転角 ϵ に依存しないことを意味する．したがって，$\mathcal{H}$ と $\mathcal{J}_z$ は可換となる．x 軸および y 軸の回りの回転も同様だから，空間の回転対称性に付随して3個の保存量 $\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z$ が存在する (自習問題 [1] 参照)．これが角運動量である．エネルギー，運動量および角運動量の保存則はこのようにして実現されている．

3次元空間のもつ対称性には，これらと異なった種類の対称性もある．その代表は空間反転あるいはパリティー変換と呼ばれる対称性である．それは，空間座標の原点についてすべての座標点 $\vec{x}$ を逆方向の座標点 $-\vec{x}$ に移す操作

$$\vec{x} \longrightarrow -\vec{x} \tag{8.5}$$

である．この空間反転のもとで3次元ベクトルが $\vec{v} \to -\vec{v}$ と符合を変えるとき，これらは極性ベクトル，変わらずに $\vec{w} \to \vec{w}$ のままのものは軸性ベクトルと呼ばれる．運動量と角運動量はそれぞれの代表例といえる．また1成分の量で変換に対して不変なもの $S \to S$ はスカラー，逆符合になるもの $P \to -P$ は擬スカラーと呼ばれる．

この空間反転の変換は，微少変換を積み重ねることによって実現することはできない．一気に大きな変換操作 (8.5) をしなければならない．変換はとびとびの操作である．このような対称性は離散的対称性と呼ばれ，並進や回転等の連続的な対称性とは性質が異なる．

連続対称性は，何も変換しない操作，すなわち恒等変換から微少変換を徐々に行うことによって任意の有限の大きさの変換に到達できる．したがって，自然法則は連続対称性によってつながるどのような空間においても同じように実現されることになる．これと対照的に空間反転のような離散的対称性の場合は，連続的に恒等変換につながる道筋が無いので，変換した系のハミルトニアンが変換前の系のハミルトニアンと等しくなければならない必然性はない．自

然法則は空間反転に対して不変である理由はどこにもない．これから見ていくように，素粒子の世界において，強い相互作用と電磁相互作用は空間反転対称性を実現しているが，これはミクロの世界の力学としては，当たり前のことではないのである．事実，弱い相互作用はその不変性を大きく破っている．

8.2 場の空間反転

まず，古典力学にもとづいた電磁場中の電子の運動の相対論的記述を考察しよう．電場 $\vec{E}(t,\vec{x})$，磁場 $\vec{B}(t,\vec{x})$ の中を速度 $\vec{v}=\frac{d}{dt}\vec{x}$ で運動する電子の力学的運動量 $\vec{p}$ は，運動方程式

$$\frac{d}{dt}\vec{p}=-e\vec{E}(t.\vec{x})-\frac{e}{c}\vec{v}\times\vec{B}(t,\vec{x}) \tag{8.6}$$

に従う．$\vec{v}$ や $\vec{p}$ は極性ベクトルだから，$\vec{E}$ が極性，$\vec{B}$ が軸性ベクトルであれば (8.6) の運動方程式は左右両辺ともに空間反転のもとで極性ベクトルとして変換し，古典電気力学は空間反転対称ということになる．$\vec{E}$ と $\vec{B}$ が3次元空間に分布した場であることを考慮してもっと正確な言い方をすると，(8.6) で

$$\vec{x}\to-\vec{x}\ ,\quad \vec{v}\to-\vec{v}\ ,\quad \vec{p}\to-\vec{p} \tag{8.7}$$

と置き換え，空間反転された電場と磁場を

$$\vec{E}^{\mathrm{P}}(t,\vec{x})=-\vec{E}(t,-\vec{x})\ ,\quad \vec{B}^{\mathrm{P}}(t,\vec{x})=\vec{B}(t,-\vec{x}) \tag{8.8}$$

と表すと，$\vec{E}^{\mathrm{P}}$ と $\vec{B}^{\mathrm{P}}$ のもとでの運動方程式が (8.6) と同じ形になるということである．$\vec{E}$ および $\vec{B}$ は4元ポテンシャル $A^\mu=(A^0,\vec{A})$ により

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}A^0 \tag{8.9}$$

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{8.10}$$

で与えられるので，A^0 はスカラーとして，$\vec{A}$ は極性ベクトルとして変換することになる．すなわち，空間反転のもとで電磁場 A_μ の各成分は

$$A_0(t,\vec{x})\longrightarrow A_0^{\mathrm{P}}(t,\vec{x})=A_0(t,-\vec{x}) \tag{8.11}$$

$$A_i(t,\vec{x})\longrightarrow A_i^{\mathrm{P}}(t,\vec{x})=-A_i(t,-\vec{x}) \tag{8.12}$$

と変換する．

量子論における対称性を見るには，電子の波動関数 $\psi(t,\vec{x})$ が空間反転のもとでどのように変換されるかを明らかにしなければならない．ψ はベクトルでもスカラーでもない，量子論において初めて現れる量であるが，量子論においても空間反転の操作が定義できるのであれば，$\psi(t,\vec{x}) \to \psi^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) \propto \psi(t,-\vec{x})$ の変換が存在するはずである．空間反転しても質量は変わらないであろうから，ψ^{P} が ψ と同じディラック方程式を満たすことが条件になる．そのような変換は定数位相係数の不定性を除けば一意的で，ψ についての変換は

$$\psi(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) = \gamma^0\psi(t,-\vec{x}) \tag{8.13}$$

で与えられる．$\psi(t,\vec{x})$ がディラック方程式を満たすとき，$\psi^{\mathrm{P}}(t,\vec{x})$ も γ^μ の反交換関係 (1.41) により

$$\begin{aligned}\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) &= \left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\gamma^0\psi(t,-\vec{x}) \\ &= \gamma^0\left(i\hbar\gamma^0\frac{\partial}{\partial x^0} + i\hbar\sum_{i=1}^{3}(-\gamma^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - mc\right)\psi(t,-\vec{x}) \\ &= \gamma^0\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc\right)\psi(t,\vec{x}') = 0\end{aligned} \tag{8.14}$$

$(x'^\mu \equiv (ct,-\vec{x}))$ となってディラック方程式を満たす．

電磁場と相互作用する電子の運動方程式は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu(t,\vec{x})\right) - mc\right)\psi(t,\vec{x}) = 0 \tag{8.15}$$

であったが，この方程式は空間反転のもとで対称である．すなわち (8.15) 式が成り立つとき，(8.11),(8.12),(8.13) で空間反転した場 $A^{\mathrm{P}}, \psi^{\mathrm{P}}$ についても

$$\begin{aligned}&\left(i\hbar\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{c\hbar}A^{\mathrm{P}}_\mu(t,\vec{x})\right) - mc\right)\psi^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) \\ &= \gamma^0\left(i\hbar\gamma^0\left(\frac{\partial}{\partial x^0} - i\frac{e}{c\hbar}A_0(t,-\vec{x})\right)\right. \\ &\qquad \left. + i\hbar\sum_{i=1}^{3}(-\gamma^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + i\frac{e}{c\hbar}A_i(t,-\vec{x})\right) - mc\right)\psi(t,-\vec{x}) \\ &= \gamma^0\left(i\hbar\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} - i\frac{e}{c\hbar}A_\mu(t,\vec{x}')\right) - mc\right)\psi(t,\vec{x}') = 0\end{aligned} \tag{8.16}$$

が満たされている．したがって，電子の電磁相互作用は量子論的にも空間反転対称である．

以上の議論は電子に限られたことではない．電荷をもちディラック方程式(6.14)に従うすべてのスピン1/2の粒子にあてはまることであり，当然ながらクォークについても成立する．クォークや荷電レプトンの波動関数は空間反転のもとで(8.13)式に従って変換され，それらの電磁相互作用は空間反転対称である．

電磁相互作用の空間反転対称性を示したが，全く同様のことは量子色力学による強い相互作用についても成り立つ．クォークの波動関数 $\psi_{\mathrm{q}}(x)$ が空間反転により(8.13)で変換されたとき，グルーオン場 $G_\mu(x)$ も電磁場と同じように

$$G_0(t,\vec{x}) \to G_0^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) = G_0(t,-\vec{x}), \tag{8.17}$$

$$G_i(t,\vec{x}) \to G_i^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) = -G_i(t,-\vec{x}) \tag{8.18}$$

と変換されれば，強い相互作用のもとでのクォークの運動方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{g_s}{c}\gamma^\mu G_\mu(x) - m_{\mathrm{q}}c\right)\psi_{\mathrm{q}}(x) = 0 \tag{8.19}$$

は空間反転対称となる．

私たちが日常的に接する物質の構造やそれらの運動は，ほとんど強い相互作用と電磁相互作用によって支配されている．これらの相互作用の空間反転対称性は鏡映対称性としても理解することができる．鏡映は物理現象を鏡に映して見ることであり，空間座標の1つの軸，たとえば x 軸のみを反転する操作であるが，これは空間反転と x 軸の回りの180度の空間回転の合成とみなせる．空間回転は正確に成り立つ対称性であるから，空間反転対称性が成り立てば必ず鏡映対称性も成り立つ．鏡映対称性が意味するところは，図8.1のように物理現象を鏡に映して見たとき，それが鏡映を見ているのか，あるいは実物を見ているのかどちらなのか判定できないということである．

8.3 荷電共役

4次元時空が備えている離散的対称性の典型例として空間反転を詳しく見てきた．この対称性はマクロな現象でも見えているものである．しかしこれ以外

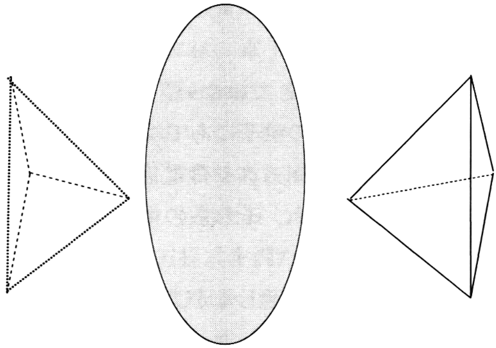


図8.1　鏡映

に，古典的には見えていないが，相対論的場の量子論の中で見えてくる対称性がある．相対論的場の量子論にもとづくと，粒子の存在は，その反粒子の存在をも意味する．私たちの身の回りの物質はすべて粒子（と呼んでいるもの）でできているが，もしそれらがすべて反粒子でできていたとすると，どのような世界が実現されるのであろうかという疑問が生じる．すなわち，粒子と反粒子を取り替えたとき，自然法則は不変であるかどうかという問題である．

再び電磁場中の電子の運動方程式 (8.15) を考察しよう．この方程式は歴史的には，電子のシュレディンガー方程式を相対論的に拡張しようという試みを通して，ディラックによって得られたものである．したがって，この方程式が表すものは電子の運動のみであろうと予想されたが，真実はそうではなかった．ψ から次式のように ψ^c を定義してみる．

$$\psi^c \equiv C\gamma^{0^T}\psi^* \tag{8.20}$$

ここに T は行列の転置を表し，C は

$$C^{-1}\gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} \tag{8.21}$$

を実現する4行4列の行列で，標準ディラック表示では $C = i\gamma^2\gamma^0$ で与えられる．(8.15) の複素共役をとって左から $C\gamma^{0^T}$ をかけると

$$\left(-i\hbar C\gamma^{0^T}\gamma^{\mu *}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{e}{c\hbar}A_\mu(t,\vec{x})\right) - mcC\gamma^{0^T}\right)\psi^*(t,\vec{x}) = 0 \tag{8.22}$$

となるが，γ 行列の（反）エルミート性 (1.40) $\gamma^{0*} = \gamma^{0T}, \gamma^{i*} = -\gamma^{iT}$ および反交換関係 (1.41) により

$$C\gamma^{0T}\gamma^{\mu *} = C\gamma^{\mu T}\gamma^{0T} = C\gamma^{\mu T}C^{-1}C\gamma^{0T} = -\gamma^{\mu}C\gamma^{0T} \tag{8.23}$$

となるので，ψ^c が次の方程式を満たすことがわかる．

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i\frac{e}{c\hbar}A_{\mu}(x)\right) - mc\right)\psi^c(x) = 0 \tag{8.24}$$

この ψ^c の方程式を ψ の方程式 (8.15) と比較してみると，両式の違いは内の括弧の中の第 2 項の符合が逆になっていることのみである．ψ が電荷 $-e$，質量 m の粒子（電子）の運動を表しているとすると，その方程式は，ψ^c の方程式として見ると，同じ質量 m をもち，電荷が逆の $+e$ をもった粒子（反粒子すなわち陽電子）の運動をも記述していることになる．このように，量子力学を相対論的に拡張すると，必然的な帰結として，粒子が存在すれば，必ず反粒子も自然界に存在することを予言する．陽電子がディラックによって予言（1929 年）されてまもなく，アンダーソンによって，その存在が実験的に発見（1932 年）され，この方程式が正しく自然法則を記述していると確信されるようになった．

粒子の電荷の符合は相対的にしか意味がない．電子の電荷が負だとするのは単に歴史的事情による．電磁場 A_μ の符合を逆に定義すると電荷は逆転する．この事情を考慮して，荷電共役変換と呼ばれる粒子と反粒子を取り替える操作を次のように導入しよう．

$$\psi \longrightarrow \psi^{\mathrm{C}} = C\gamma^{0T}\psi^*, \quad A_\mu \longrightarrow A_\mu^{\mathrm{C}} = -A_\mu \tag{8.25}$$

明らかに，ψ^{C} と A_μ^{C} は ψ と A_μ が満たす方程式と全く同じ形の方程式を満たす．すなわち，この変換に対して電磁相互作用の法則は不変である．

同様の不変性はクォークとグルーオンの強い相互作用についても成り立つ．これらについての荷電共役変換は，クォークの反クォークへの変換と，3 行 3 列のエルミート行列で表されたグルーオン場の変換

$$\psi_{\mathrm{q}} \longrightarrow \psi_{\mathrm{q}}^{\mathrm{C}} \equiv \psi_{\bar{\mathrm{q}}} = C\gamma^{0T}\psi_{\mathrm{q}}^* \tag{8.26}$$

$$G_\mu \longrightarrow G_\mu^{\mathrm{C}} = -G_\mu^* = -G_\mu^T \tag{8.27}$$

で与えられる．これらの変換に対して量子色力学の運動方程式 (8.19) は対称である．

電磁相互作用と強い相互作用の運動法則は，その運動方程式を粒子で記述しても，反粒子で記述しても同じ形になる．すなわち，荷電共役変換に対して不変である．このことは，電子やクォークから構成されたこの物質界と，陽電子や反クォークから構成された反物質界が，強い相互作用と電磁相互作用に関する限りでは，全く同じ現象を引き起こし，両者を識別できないことを意味している．

このように，強い相互作用と電磁相互作用のもとでクォークやレプトンが従う運動法則は，荷電共役および空間反転のもとで不変であるが，この不変性の背後にはゲージ原理が深く関わっている．有限の質量をもった自由粒子のディラック方程式から出発して，ゲージ原理にもとづき電磁相互作用と強い相互作用のゲージ対称性を実現するように，ゲージ場である電磁場やグルーオン場との相互作用を取り入れると，その方程式の形は必然的に (8.15) や (8.19) となり，それを不変に保つように場の変換性を定めることができる．この結果に重要なのは，粒子の質量が粒子に生来的に付随した定数であり，空間反転や荷電共役あるいはゲージ変換によって変換を受けるようなものではないという大前提である．よりミクロな世界で粒子の質量の起源を探って行くと，実はこの大前提はこわれてしまう．弱い相互作用があらわに見えてくる 10^{-17} m くらいまでいくと，粒子の質量は単なる定数ではなく，新たな相互作用の結果によって生じた力学量であることがわかる．W や Z が媒介する弱い相互作用もやはり，ゲージ原理にもとづいたゲージ対称性に支配されているが，その相互作用においてはもはや空間反転や荷電共役の対称性は成り立たない．

一般に変換に対する対称性があると，それに伴って保存則が現れる．歴史的には量子色力学が確立する遥か以前から，強い相互作用と電磁相互作用においてどのような保存則が実現されているか，また，それらの保存則が弱い相互作用による様々な反応においてどのように破れているかが，いろいろな実験事実として認識され，それらを理解するように素粒子の理論が確立してきた．

8.4 反粒子のパリティ

8.3 節で，ディラック方程式に従うスピンが 1/2 の粒子について，空間反転による粒子の波動関数 ψ の変換性を $\psi \to \gamma^0\psi$ と与えたが，この変換には絶対

値が1の位相因子 η の不定性がある．$\psi \to \eta\gamma^0\psi$ と定義しても全く同様の議論が成立する．空間反転を続けて2度行うと，もとにもどって何も変換しないことになるので，$\eta^2 = 1$ の条件を課しておくと都合がよい．このルールのもとでは $\eta = +1$ もしくは $\eta = -1$ の2つの場合がゆるされる．どちらを採用してもかまわない．それは単に最初の約束事である．こうして決めた η を ψ が表す粒子の固有パリティと呼ぶ．

強い相互作用と電磁相互作用は空間反転と荷電共役の変換について不変であることをこれまで見てきた．粒子について上のようにして固有パリティを決めると，その反粒子にも固有パリティが自動的に定まっているはずである．反粒子の波動関数の定義 (8.20) より，その空間反転は

$$\psi^c \longrightarrow C\gamma^{0T}(\eta\gamma^0\psi)^* = -\eta\gamma^0 C\gamma^{0T}\psi^* = -\eta\gamma^0\psi^c \tag{8.28}$$

となる．ここに，最初の等号において関係式 (8.23) を用いた．この変換式は，粒子と反粒子は固有パリティが逆であり，空間反転のもとで逆符合で変換することを示している．固有パリティの絶対的な符合には不定性があるが，粒子と反粒子の間の相対的な符合は一意的に定まる．この関係は，電子と陽電子，クォークと反クォーク等，ディラック方程式に従うスピンが1/2のすべての粒子とその反粒子の間で成り立つものである．

光子はスピンが1の粒子であり，場の理論的には，電磁場 $\vec{A}$ の振動モードが励起した状態である．その固有パリティは不定性なしに $\eta = -1$ と定まっている．グルーオンについても同様である．

8.5　パリティの保存

力学系の状態を空間反転する量子論的演算子を $\mathcal{P}$ と書こう．この演算子は任意の量子力学的状態 $|\Psi\rangle$ に作用すると，それを空間反転した状態に移す演算子である．

$$|\Psi\rangle \to |\Psi_P\rangle = \mathcal{P}|\Psi\rangle \tag{8.29}$$

空間反転を2回ほどこすともとにもどるので $\mathcal{P}^2 = 1$ である．力学系が空間反転に対して対称であるということは，系の量子論的ハミルトニアン $\mathcal{H}$ が空間反転の変換のもとで不変，すなわち

$$\mathcal{H} \to \mathcal{H}_P \equiv \mathcal{P}\mathcal{H}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{H} \tag{8.30}$$

を意味する．したがって，$|\Psi(t)\rangle$ がハミルトニアン $\mathcal{H}$ のシュレディンガー方程式を満たすとき，$\mathcal{P}|\Psi(t)\rangle$ も同じシュレディンガー方程式を満たす．

時刻 $t = 0$ において状態 $|\Psi\rangle$ が $\mathcal{P}$ の固有状態であるとしよう．

$$\mathcal{P}|\Psi\rangle = \eta_P|\Psi\rangle \tag{8.31}$$

η_P は状態 $|\Psi\rangle$ のパリティと呼ばれ，その値は $+1$ か -1 である．任意の時刻 t における状態 $|\Psi(t)\rangle$ はシュレディンガー方程式の解として

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|\Psi\rangle \tag{8.32}$$

で与えられるが，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{H}$ の可換性のため，その状態はパリティの固有状態のまま，すなわち

$$\mathcal{P}|\Psi(t)\rangle = \eta_P|\Psi(t)\rangle \tag{8.33}$$

が成り立ち，パリティ η_P は保存される．

全く同様な議論は荷電共役変換 $\mathcal{C}$ についても成り立ち，荷電共役パリティ η_C も保存される．これらの η_P と η_C の保存則は強い相互作用と電磁相互作用で引き起こされる様々な素粒子反応に強い選択則を与える．

8.6 メソンのパリティ

ハドロンはグルーオンによる強い相互作用によってクォークの複合系として実現されている．グルーオンやクォークあるいは反クォークは，空間反転や荷電共役変換のもとでの変換性が定まっているので，当然のことであるが，個々のハドロンもこれらの変換のもとでどのように変換するかは定まる．

ハドロンの1粒子状態はハミルトニアンの固有状態として実現され，全運動量が0であるハドロンの静止系においては，その固有値はハドロンの質量に c^2 をかけたものになる．どのようなハドロンの状態が実現されるのかを正確に調べるには，グルーオンによって媒介される強い相互作用の量子色力学を解かなければならない．これは大変な労力が求められる問題であり，現代素粒子物理学の課題として精力的に取り組まれている研究分野である．

ここではこの詳細には立ち入らない．理論的には多少不正確であるが，直観的理解にすぐれた「クォークモデル」と呼ばれる方法にもとづき，ハドロンを素朴な非相対論的ポテンシャルによる束縛状態として取り扱うことによって，メソンがどのようなパリティをもつかを考えてみよう．

メソンはクォーク q と反クォーク $\bar{\mathrm{q}}'$ の複合系である．q と $\bar{\mathrm{q}}'$ がそれぞれスピン状態が λ と λ'，運動量が $\vec{k}$ と $-\vec{k}$ である 2 粒子状態を $|\bar{\mathrm{q}}'_{\lambda'}(-\vec{k})\ \mathrm{q}_\lambda(\vec{k})\rangle$ と書く．λ と λ' はそれぞれ $\pm 1/2$ の値をとる．q と $\bar{\mathrm{q}}'$ の相対的な軌道角運動量を L とし，運動量空間における波動関数を $f_L(\vec{k})$ とすると，その状態は

$$|\Psi_{\lambda'\lambda}\rangle = \int d^3\vec{k} f_L(\vec{k}) |\bar{\mathrm{q}}'_{\lambda'}(-\vec{k})\ \mathrm{q}_\lambda(\vec{k})\rangle \tag{8.34}$$

と表される．波動関数 $f_L(\vec{k})$ は角運動量と波動関数の偶奇性の関係により

$$f_L(-\vec{k}) = (-1)^L f_L(\vec{k}) \tag{8.35}$$

が成り立つ．ここでこの状態がどのようなパリティをもっているかを調べるため空間反転の操作

$$|\Psi_{\lambda'\lambda}\rangle \longrightarrow \mathcal{P}|\Psi_{\lambda'\lambda}\rangle \tag{8.36}$$

を行ってみる．注意すべきことは，$\mathcal{P}$ は量子論的演算子であるから状態ベクトルにのみ作用し係数関数には作用しないこと，運動量 $\vec{k}$ の状態は $-\vec{k}$ の状態に変換されること，角運動量は軸性ベクトルであるからスピン状態は空間反転で変化しないこと，およびクォークと反クォークの固有パリティが積でかかることである．したがって

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}|\Psi_{\lambda'\lambda}\rangle &= \int d^3\vec{k} f_L(\vec{k}) \mathcal{P} |\bar{\mathrm{q}}'_{\lambda'}(-\vec{k})\ \mathrm{q}_\lambda(\vec{k})\rangle \\
&= -\int d^3\vec{k} f_L(\vec{k}) |\bar{\mathrm{q}}'_{\lambda'}(\vec{k})\ \mathrm{q}_\lambda(-\vec{k})\rangle \\
&= -\int d^3\vec{k} f_L(-\vec{k}) |\bar{\mathrm{q}}'_{\lambda'}(-\vec{k})\ \mathrm{q}_\lambda(\vec{k})\rangle \\
&= -(-1)^L |\Psi_{\lambda'\lambda}\rangle
\end{aligned} \tag{8.37}$$

すなわちこの状態はパリティ

$$\eta_P = -(-1)^L \tag{8.38}$$

の固有状態である．ポテンシャル問題で基底状態は軌道角運動量が $L=0$ のS波であるから，そのパリティは $\eta_P=-1$ となる．このときメソンのスピンはクォークと反クォークのスピンの合成されたものとなり，スピン0とスピン1が実現される．前者はスピン・パリティが 0^- の擬スカラー粒子 $\mathrm{M_P}$ で π メソンの仲間，後者は 1^- のベクトル粒子 $\mathrm{M_V}$ で ρ メソンの仲間であり，それらはともにパリティは -1 である．

8.7　荷電共役パリティ

次に，前節で構成したメソンの状態が荷電共役 $\mathcal{C}$ のもとでどのように変換するかを調べてみよう．

$$\begin{aligned}\mathcal{C}|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{\lambda'\lambda}\rangle &= \int d^3\vec{k} f_L(\vec{k})\mathcal{C}|\bar{\mathrm{q}}'_{\lambda'}(-\vec{k})\ \mathrm{q}_\lambda(\vec{k})\rangle \\ &= \int d^3\vec{k} f_L(\vec{k})|\mathrm{q}'_{\lambda'}(-\vec{k})\ \bar{\mathrm{q}}_\lambda(\vec{k})\rangle \\ &= -\int d^3\vec{k} f_L(\vec{k})|\bar{\mathrm{q}}_\lambda(\vec{k})\ \mathrm{q}'_{\lambda'}(-\vec{k})\rangle \\ &= -(-1)^L|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}'}_{\lambda\lambda'}\rangle \end{aligned} \tag{8.39}$$

この式の2行目から3行目への変形において，状態ベクトルの中の q' と $\bar{\mathrm{q}}$ の入れ替え操作のもとでこれらがフェルミ・ディラック統計に従うことによるマイナスの符合が取り込まれている．

軌道角運動量が $L=0$ のS波の状態について考えよう．この場合メソンのスピンはクォークと反クォークのスピンの合成で与えられる．角運動量の合成則によりスピンが $s=1$ の状態は $S_z=+\hbar,0,-\hbar$ について

$$|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{1/2\ 1/2}\rangle\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{-1/2\ 1/2}\rangle+|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{1/2\ -1/2}\rangle\right)\ ,\ |\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{-1/2\ -1/2}\rangle \tag{8.40}$$

スピンが $s=0$ の状態は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{-1/2\ 1/2}\rangle-|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}_{1/2\ -1/2}\rangle\right) \tag{8.41}$$

で与えられる．前者はクォークのスピンの添字について対称，後者は反対称だから

$$\mathcal{C}|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}(s=1)\rangle=-|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}'}(s=1)\rangle\ ,\ \mathcal{C}|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}}(s=0)\rangle=|\Psi^{\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}'}(s=0)\rangle \tag{8.42}$$

が得られる．$q' = q$ のときメソンは真性中性粒子となりその状態は荷電共役 $\mathcal{C}$ の固有状態となる．π^0 メソンは荷電共役パリティは $\eta_C = +1$，ρ^0 メソンや ω^0 メソンは $\eta_C = -1$ である．また，8.3 節で見たように，電磁場は荷電共役のもとで符合が逆転されることから，光子 γ は $\eta_C = -1$ の固有状態である．

$\mathcal{C}$ の固有状態である粒子が強い相互作用あるいは電磁相互作用によって崩壊するときには，それらの相互作用の荷電共役不変性のため，崩壊後の状態も $\mathcal{C}$ の固有状態でなければならない．たとえば，π^0 は電磁相互作用によって光子 2 個に崩壊できるが光子 3 個にはなれない．他方 ρ^0 は強い相互作用によって $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$ の崩壊を起すが，$\pi^0$2 個への崩壊や光子 2 個への崩壊は禁止される．

自習問題

[1] x, y, z 軸回りの微少回転角 α, β, γ の回転のユニタリー演算子を $e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\mathcal{J}_x}$, $e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\mathcal{J}_y}$,$e^{-\frac{i}{\hbar}\gamma\mathcal{J}_z}$ とする．回転操作の幾何学により

$$e^{\frac{i}{\hbar}\beta\mathcal{J}_y} e^{\frac{i}{\hbar}\alpha\mathcal{J}_x} e^{-\frac{i}{\hbar}\beta\mathcal{J}_y} e^{-\frac{i}{\hbar}\alpha\mathcal{J}_x} \cong e^{-\frac{i}{\hbar}(-\alpha\beta)\mathcal{J}_z} \tag{8.43}$$

が成り立つことを確かめよ．また, これから角運動量の交換関係 $[\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y] = i\hbar\mathcal{J}_z$ を導け．

[2] $\rho^0 \to \pi^+ + \pi^-$ の崩壊が，角運動量，空間反転および荷電共役変換の保存則をすべて満たしていることを確かめよ．

コラム：空間反転対称性の大問題

生命現象は鏡映対称性を満たしていない．自然界に存在するたんぱく質はすべて左巻きの螺旋構造をしており，右巻き構造のものは存在しない．無機質から人工的にたんぱく質を合成すると右巻きと左巻きは同じ頻度でできる．生命現象には空間反転対称性を破る弱い相互作用の効果が微妙に反映しているのかどうか，興味深いところである．

強い相互作用や電磁相互作用の空間反転および荷電共役対称性を正確に議論するには，電子やクォークの運動方程式だけでなく，電磁場やグルーオン場が従う運動方程式 (7.22) や (7.25) の不変性も確かめなければならないが，これらも変換のもとで対称である．しかし，グルーオン場による強い相互作用には，運動方程式では書き表すことはできないが，空間反転対称性を大きく破る，場の量子論特有の効果が現れる可能性が理論的に否定できない．実験事実は，強い相互作用は高い精度で空間反転不変性を満たしており，したがって，この余分な効果は何らかの機構によって消え去っているか，あるいは禁止されていると予想されているが，現在までのところそれについての確定的な答は確立していない．

CHAPTER 9

クォーク・フレーバーとアイソスピン

ハドロンはクォークの複合系として実現されており，どのようなクォーク・フレーバーが組み合わさっているかによって，様々なハドロンが存在する．したがってハドロンは構成クォークのフレーバーによって分類されることになる．ところがそれだけでなく，クォークのうち，uとdがほかのクォークに比べて大変質量が小さいという全く偶然的と思える事実のため，強い相互作用の量子色力学においてアイソスピン対称性と呼ばれる新たな近似的対称性が現れる．この対称性はハドロンの分類において大変有用となる．

9.1 フレーバー量子数

電磁相互作用と強い相互作用のもとで，クォークは光子やグルーオンを吸収・放出するとき，そのフレーバー $(\mathrm{q} = \mathrm{u, d, s, c, b, t})$ は変化しない．また，対生成や対消滅も同一のフレーバーのクォークと反クォークでしか起きない．これは保存量の存在を意味している．それぞれのクォーク・フレーバーについてクォーク・フレーバー量子数 X_{q} を

$$X_{\mathrm{q}}(\mathrm{q}') = \delta_{\mathrm{q},\mathrm{q}'}, \quad X_{\mathrm{q}}(\bar{\mathrm{q}}') = -\delta_{\mathrm{q},\mathrm{q}'} \tag{9.1}$$

で定義しよう．たとえば，uクォークは $X_{\mathrm{u}}(\mathrm{u}) = 1$，$\bar{\mathrm{u}}$ は $X_{\mathrm{u}}(\bar{\mathrm{u}}) = -1$，ほかのクォークや反クォークは $X_{\mathrm{u}} = 0$ とする．クォークや反クォークが多数存在している状態においては，それぞれのクォークと反クォークの X_{q} を加え合わせたもので定義する．そうすると X_{u} はuの総数から $\bar{\mathrm{u}}$ の総数を引いた数になるが，これは電磁相互作用と強い相互作用がどんなに複雑にからんでも変化しない保存量である．このように，電磁相互作用と強い相互作用のもとで6個の加

算的な量子数 $X_{\rm q}$ の保存則が実現されている．

保存則が成り立っているということは，運動法則に対称性が存在していることを意味している．電磁相互作用と強い相互作用の両方の力のもとで，クォークの波動関数 $\psi_{\rm q}(x)$ は運動方程式

$$\left(i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{g_s}{c}\gamma^{\mu}G_{\mu} - \frac{eQ_{\rm q}}{c}\gamma^{\mu}A_{\mu} - m_{\rm q}c\right)\psi_{\rm q} = 0 \tag{9.2}$$

に従う．この方程式は，電磁相互作用のゲージ変換

$$\psi'_{\rm q} = e^{iQ_{\rm q}\Lambda}\psi_{\rm q}\ ,\ A'_{\mu} = A_{\mu} - \hbar\frac{c}{e}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\Lambda\ ,\ G'_{\mu} = G_{\mu} \tag{9.3}$$

および強い相互作用のゲージ変換

$$\psi'_{\rm q} = U\psi_{\rm q}\ ,\ G'_{\mu} = UG_{\mu}U^{-1} + i\hbar\frac{c}{g_s}\frac{\partial U}{\partial x^{\mu}}U^{-1}\ ,\ A'_{\mu} = A_{\mu} \tag{9.4}$$

の両方の変換のもとで不変である．(9.3) と (9.4) においてそれぞれ G_{μ} と A_{μ} が変換されてないのは，グルーオンが電荷を帯びていないこと，および光子が色電荷を帯びていないことの反映である．運動方程式 (9.2) は，時空点 x に依存した (9.3),(9.4) の 2 種のゲージ変換のもとでの対称性のほかに，もっと単純な対称性がある．(9.2) がクォーク・フレーバー q=u, d, s, c, b, t ごとに独立に成り立っているので，それぞれのクォークの波動関数 $\psi_{\rm q}(x)$ の位相を，x に依存しない定数 $\theta_{\rm q}$ で

$$\psi'_{\rm q}(x) = e^{i\theta_{\rm q}X_{\rm q}}\psi_{\rm q}(x) \tag{9.5}$$

と変換しても不変である．フレーバー量子数 $X_{\rm q}$ の保存はこの 6 通りの対称性の結果として実現されている．反クォークは複素共役で変換されるので，符合が逆になるのである．

9.2 アイソスピン

電磁相互作用は強い相互作用に比べてその力はかなり弱いので，ハドロンが示すもろもろの性質の理解において，第 0 近似ではそれを無視し，必要に応じて摂動として取り入れていくことがゆるされる．電磁相互作用を無視すると，クォークの運動方程式 (9.2) においてクォーク・フレーバー依存性はクォーク

の質量 m_{q} を通してのみ現れ，強い相互作用を媒介するグルーオンとクォークの相互作用はクォーク・フレーバーによらない．

クォークの質量は2.3節で述べたように，フレーバーの違いによって次のように大きな差がある．

$$m_{\mathrm{u}} \sim m_{\mathrm{d}} \ll m_{\mathrm{s}} \ll m_{\mathrm{c}} \ll m_{\mathrm{b}} \ll m_{\mathrm{t}} \tag{9.6}$$

陽子や中性子はu, dクォークからできているが，それらの質量 (∼ 1 GeV) は構成しているクォークの質量 (3∼5 MeV) に比べてはるかに大きい．すなわち陽子や中性子の質量の大部分は，もともとのクォークの質量に起因しているのではなく，グルーオンによって媒介される強い相互作用の力学の結果として産み出されているものである．強い相互作用が力学として内包している典型的な質量のスケールが大体1 GeVということである．したがって，ハドロンの諸性質を理解するときに m_{u} と m_{d} はかなり良い近似で無視することができる．また m_{s}(∼ 100 MeV) もある程度の近似で無視することがゆるされる．

m_{u} と m_{d} はともに小さいのであるから，まずは $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}}$ と近似してみる．電磁相互作用も無視すると ψ_{u} と ψ_{d} は全く同じディラック方程式を満たすことになり，そこには新たな対称性が現れる．クォーク・フレーバー保存に付随した ψ_{u} と ψ_{d} のそれぞれ独立な位相変換のほかに，次のように2行2列のユニタリー行列によって ψ_{u} と ψ_{d} を混ぜ合わせる $SU(2)$ の変換に対しても不変である．

$$\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{u}} \\ \psi_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\mathrm{u}} \\ \psi'_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} = e^{i\sum_{a=1}^{3}\theta^a I_a} \begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{u}} \\ \psi_{\mathrm{d}} \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

ここに I_a は $SU(2)$ の基底行列 (6.61)

$$I_a = \frac{\sigma^a}{2} \qquad a = 1, 2, 3 \tag{9.8}$$

で σ^a は2行2列のパウリ行列 (1.43)，θ^a $(a = 1, 2, 3)$ は実数の変換パラメターである．この変換は3次元空間の座標回転において，スピンが1/2の粒子の波動関数の $S_z = \hbar/2$ および $S_z = -\hbar/2$ の成分の変換則と同じ形をしているのでアイソスピン変換と呼ばれる．uクォークとdクォークはアイソスピン I_a の大きさが $I = 1/2$ のアイソ2重項をなしており，uは第3成分の値が $I_3 = 1/2$，dは $I_3 = -1/2$ である．3次元空間の座標回転の対称性に付随して

角運動量が保存するのと同様に，アイソスピン空間の回転対称性に伴い，3個の成分からなるアイソスピン $\vec{I} = (I_1, I_2, I_3)$ が加算的な保存量として実現される．uやdを複数個含んだハドロンは，スピンの合成と同様のアイソスピンの合成則にもとづき，整数もしくは半整数のアイソスピン I および第3成分の値 $I_3 = -I, \cdots, I$ を量子数としてもつことになる．これら $2I+1$ 個の状態は $m_\mathrm{u} = m_\mathrm{d}$ の近似のもとでアイソスピンの対称性により質量が縮退する．

クォークの運動方程式(9.2)の中の電磁相互作用の項は，uとdの電荷が異なるので，アイソスピン変換(9.7)のもとで不変ではない．したがって，電磁相互作用はuとdの質量差 $\delta m = m_\mathrm{d} - m_\mathrm{u}$ とあいまってアイソスピンの破れを引き起こす．

9.3　バリオン

バリオンはクォーク3個によって構成されている．u, d, sクォークによって構成されている代表的なバリオンについて見てみよう．スピンが $s = 1/2$ の基底状態のバリオンは陽子pや中性子nを代表として表9.1の8種類（バリオン8重項 B_8）が存在している．表中，X_s はsクォーク・フレーバー量子数であるが，通常，逆符合で定義した $S \equiv -X_\mathrm{s}$ がストレンジネスと呼ばれる．スピンが $s = 3/2$ のバリオンは Δ 粒子を代表として表9.2の10種類（バリオン10重項 B_{10}）が存在している．

表9.1　バリオン8重項 B_8(s=1/2)

	質量	構成クォーク	X_s	I	I_3
p	938.3	u u d	0	1/2	1/2
n	939.6	u d d			−1/2
Λ^0	1115.7	u d s	1	0	0
Σ^+	1189.4	u u s	1	1	1
Σ^0	1192.6	u d s			0
Σ^-	1197.4	d d s			−1
Ξ^0	1314.9	u s s	2	1/2	1/2
Ξ^-	1321.7	d s s			−1/2

表 9.2 バリオン 10 重項 $B_{10}(s=3/2)$

	質量	構成クォーク	X_s	I	I_3
Δ^{++}	1232	u u u	0	3/2	3/2
Δ^{+}		u u d			1/2
Δ^{0}		u d d			−1/2
Δ^{-}		d d d			−3/2
Σ^{*+}	1385	u u s	1	1	1
Σ^{*0}		u d s			0
Σ^{*-}		d d s			−1
Ξ^{*0}	1530	u s s	2	1/2	1/2
Ξ^{*-}		d s s			−1/2
Ω^{-}	1672	s s s	3	0	0

これらの表から読み取れる主な特徴を見よう．まず，バリオン中に含まれる s クォークの個数が増えるごとにバリオンの質量は百数十 MeV ほどずつ重たくなっている．これは s クォークが u や d より百数十 MeV 重たいことの反映である．一方，同一のアイソスピンの多重項の中では，d クォークの個数の多いもの，すなわち I_3 の値の低いものの方がわずかに質量が大きい．この質量差を産み出している主要な原因はクォークの質量差，d クォークが u クォークよりわずかに重たいことにあるが，それだけでなくアイソスピン対称性を破る電磁相互作用の効果も反映されている．

次に目につく興味深いことは，Λ^0 と Σ^0 は全く同じクォーク u, d, s から構成されているにも関わらず，質量がかなりずれていることである．アイソスピンの差がどのようにしてこの質量差をもたらすのかを，8.6 節で行ったのと同様の「クォークモデル」にもとづいて考察しよう．u, d, s 3 クォークの無色の状態 $\sum \epsilon_{ijk}|\mathrm{u}^i_\lambda \mathrm{d}^j_{\lambda'} \mathrm{s}^k_{\lambda''}\rangle$ は，u, d に「反交換関係」を適用すると $\sum \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}|(\mathrm{u}^i_\lambda \mathrm{d}^j_{\lambda'} + \mathrm{d}^i_{\lambda'} \mathrm{u}^j_\lambda)\mathrm{s}^k_{\lambda''}\rangle$ と表される．軌道運動の波動関数は基底状態だから u, d クォークについては対称である．したがってこれらの状態は，u, d の 2 クォークのクォーク・フレーバーとクォーク・スピンの同時の入れ替えについて完全対称である．それらの基底ベクトルを，2 クォークの合成アイソスピン I と合成スピン s の固有状態の積として表すと $\frac{1}{2}|\mathrm{ud}+\mathrm{du}\rangle|\lambda\lambda'+\lambda'\lambda\rangle$ および $\frac{1}{2}|\mathrm{ud}-\mathrm{du}\rangle|\lambda\lambda'-\lambda'\lambda\rangle$ となる．前者は $I=1, s=1$，後者は $I=0, s=0$ で

ある．Λ^0 はアイソスピンが $I=0$ だから，その中の ud の合成スピンは $s=0$，他方，Σ^0 は $I=1$ で ud の合成スピンは $s=1$ になっている．電子が電磁場との相互作用を通して $\frac{e\hbar}{2mc}$ のスピン磁気モーメントをもつように，クォークもグルーオンとの相互作用を通して質量に逆比例したスピン色磁気モーメントをもつ．特に，質量が軽い u, d クォークについてはその効果が大きく効いてくる．このスピン色磁気モーメントは 2 個のクォークスピン間にスピン・スピン相互作用のエネルギー

$$\mathcal{H}=\kappa\vec{S}_{(1)}\cdot\vec{S}_{(2)}=\frac{\kappa\hbar^2}{2}(s(s+1)-\frac{3}{2}) \tag{9.9}$$

を産み出す．その結果，$s=1$ の Σ^0 と $s=0$ の Λ^0 との間に大きな質量差が実現されている．もし $m_{\rm u}=m_{\rm d}=m_{\rm s}$ だったら 3 個のクォークのそれぞれの間にこの相互作用は等しく効く．$m_\Sigma \gg m_\Lambda$ は s が u, d より質量がずっと大きいことの反映である．電磁相互作用はクォーク・フレーバーは保存するがアイソスピンは保存しない．したがって，電磁相互作用によって Σ^0 は Λ^0 に遷移することが可能であり，2.3 節で述べたように，Σ^0 はほぼ 100% $\Sigma^0\to\Lambda^0+\gamma$ の電磁崩壊をする．

歴史的にはこれらのバリオンのリストをうまく説明するために，ゲルマンおよびツヴァイクによってクォークという基本粒子が考案（1964 年）された．その当時は u, d, s のクォーク・フレーバーを含んだハドロンまでしか発見されていなかったので，これらの 3 種のクォークに関わる対称性が追求された．アイソスピン対称性は u, d の間の $SU(2)$ 対称性であるが，これを u, d, s の間の 3 行 3 列の $SU(3)$ の行列 U による変換

$$\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{d}\\ \mathrm{s}\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\mathrm{u}'\\ \mathrm{d}'\\ \mathrm{s}'\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\mathrm{u}\\ \mathrm{d}\\ \mathrm{s}\end{pmatrix} \tag{9.10}$$

についての対称性に拡張し，その変換によって互いに結び付くまとまりが上の 2 つのバリオンの表 9.1, 9.2 である．これらのバリオンの状態を横軸が I_3，縦軸が $S=-X_{\rm s}$ で図示すると図 9.1 のような感動的な美しさをもった図が得られる．

この図が描かれたときには，まだスピン 3/2 の Ω^- は発見されていなかった．この図を見れば，それが 1680MeV 前後のあたりに存在するであろうこ

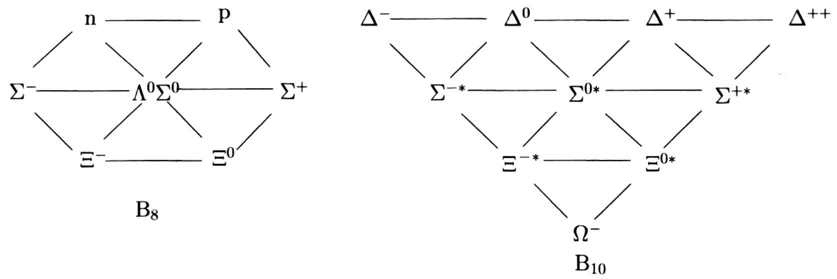


図 9.1 バリオンの SU(3) 表現

とは疑いようがない．スピン 3/2 のバリオン B_{10} でそれまで見つかっていた Δ, Σ^*, Ξ^* は，すべて強い相互作用によって π メソンを放出してスピン 1/2 のバリオン B_8 に遷移できる．そのため，それらの崩壊幅 Γ はかなり大きく (10 MeV〜100 MeV) なり，比較的容易にそれらの存在を発見することができた．ところが Ω^- は強い相互作用でつながる崩壊モードがすべてしきい値以下であるため，エネルギーの保存則によってそれらのモードへの崩壊が禁止される．崩壊は弱い相互作用を通してのみ起るため，その崩壊幅は $\Gamma_\Omega = 8.0 \times 10^{-6}$ eV と，極めて小さい．1964 年に理論的予言に呼応して実施された加速器実験によってこの粒子が発見され，クォークという奇妙な電荷をもった基本粒子の考えが定着していくことになったのである．

スピンが 1/2 と 3/2 のバリオンの表を比較して不思議に感じる点は，同一フレーバーのクォーク 3 個で構成されたバリオン Δ^{++}(uuu)，Δ^-(ddd) および Ω^-(sss) はすべてスピン 3/2 の B_{10} にのみ実現されており，スピン 1/2 のバリオン B_8 にはそのような状態が実現されていないことである．実は，この事実こそが，クォークが 3 つの色の自由度をもっているという認識に導く原動力となった．

「クォークモデル」にもとづいてバリオン B_{10} について考察しよう．Δ^{++}(uuu) のスピン $S_z = 3\hbar/2$ の状態に注目する．これは基底状態であるから，軌道角運動量は励起されていない．したがって 3 個のクォークはすべてスピンが $S_z = \hbar/2$ でそろっていなければならない．そうすると 3 個のクォークのフレーバーとスピンの状態は $|u_{1/2}u_{1/2}u_{1/2}\rangle$ となる．軌道運動の波動関数は軌道角運動量が 0 で方向依存性をもたない完全対称な関数のはずだから，この状態は 3 個のクォークの中の任意の 2 個のクォークの入れ替え操作のもとで不変な

完全対称状態になる．しかし，クォークが従うべきフェルミ・ディラック統計によると，同種粒子のフェルミオン系の状態は完全反対称でなければならず，このような完全対称状態は禁止されている．

このパラドックスを解いたのが，南部陽一郎によって提案されたクォークの色の自由度であった．クォークは各フレーバーごとに3種の色の自由度を備えている．バリオンはクォークの色の添字について完全反対称となった無色な状態として実現されていると考えられた．この考えがその後，量子色力学の確立へと導いていった．

クォーク q^f $(f = \mathrm{u,d,s})$ を (9.10) に従って $SU(3)$ 変換 $\mathrm{q}^f \to \mathrm{q}'^f = \sum_{g=\mathrm{u,d,s}} U^f{}_g \mathrm{q}^g$ すると $|\Delta^{++}\rangle = |\mathrm{uuu}\rangle$ はこの変換のもとで

$$|\mathrm{uuu}\rangle \to |\mathrm{uuu}\rangle' = \sum_{f,g,h=\mathrm{u,d,s}} U^{\mathrm{u}}{}_f U^{\mathrm{u}}{}_g U^{\mathrm{u}}{}_h |\mathrm{q}^f \mathrm{q}^g \mathrm{q}^h\rangle \tag{9.11}$$

となる．変換係数 $U^{\mathrm{u}}{}_f U^{\mathrm{u}}{}_g U^{\mathrm{u}}{}_h$ は添字 f, g, h について完全対称だから，この変換に寄与する3クォーク状態は $|\mathrm{q}^f \mathrm{q}^g \mathrm{q}^h\rangle$ を添字 f, g, h について完全対称化した状態 $|\{\mathrm{q}^f \mathrm{q}^g \mathrm{q}^h\}\rangle$ のみである．たとえば，

$$|\Delta^+\rangle = |\{\mathrm{uud}\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\mathrm{uud}\rangle + |\mathrm{udu}\rangle + |\mathrm{duu}\rangle) \tag{9.12}$$

である．u, d, s の3種の中から3個をとってきて完全対称に並べる並べ方の総数は $\frac{3\times4\times5}{1\times2\times3} = 10$ で，これがスピン 3/2 のバリオン B_{10} の表の登場粒子である．完全対称状態は，どう $SU(3)$ 変換しても完全対称状態にとどまる．B_{10} の各成分は $SU(3)$ の変換のもとで互いに移り変わるが，B_{10} の外には出ない．それらは $SU(3)$ の10次元表現と呼ばれる．

これまでスピン状態を $S_z = 3\hbar/2$ としてきたが，それに限らず，3個のスピン 1/2 の粒子からスピン 3/2 を合成するときには，スピンの波動関数は3個のスピンの任意の2組についての入れ替えに対して完全対称である．したがって，B_{10} はクォーク・フレーバーとスピン状態がそれぞれ独立に完全対称な状態として実現されている．

以上の B_{10} (および先の Σ^0, Λ^0) についての「クォークモデル」の成功は，バリオンを構成しているクォークの3種のフレーバー u, d, s と3種の色 $i = 1, 2, 3$ は，スピン $\lambda = \pm 1/2$ と同様に，あたかも1種類の粒子 q が備えているいろいろの量子状態の種類であるかのようにみなせることを示唆している．B_{10} は3

個の同種粒子qの系の量子数について完全反対称な状態としてフェルミ・ディラック統計を実現している．こう考えると，完全反対称状態はB_{10}だけに制限されない．スピンとフレーバーが個別には完全対称ではないが，両者を込みにしてみて完全対称であれば十分である．スピン1/2のバリオンB_8はまさにそのように実現されている．u, d, sの3種のクォークにそれぞれ2通りのスピンの状態があるので全部で6種のクォークの状態が色の自由度以外にある．基底状態のバリオンは，これら6種の中から3個を選んで完全対称になるように並べる並べ方の数だけ実現される．場合の数は$\frac{6\times7\times8}{1\times2\times3}=56$で，これが10種類のスピン3/2のバリオン$B_{10}$と8種類のスピン1/2のバリオン$B_8$の，スピン状態まで含めた総数$10\times4+8\times2=56$になっている．

B_8は$SU(3)$の8次元表現であり，$SU(3)$のリー代数の行列の形で

$$B_8=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0+\frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}}\Lambda^0 \end{pmatrix} \tag{9.13}$$

と表すことができる（自習問題[1]参照）．$SU(3)$の変換(9.10)のもとでこれらは

$$B_8\to B_8'=UB_8U^{-1} \tag{9.14}$$

と変換する．

ここで，これらのバリオンの固有パリティについて触れておこう．すべてのクォークqについて固有パリティを$\eta_q=+1$と約束すると，クォーク3体系のバリオンを空間反転したときに寄与するクォークの固有パリティの積は$+1$である．したがって，バリオンの固有パリティはクォークの軌道運動の波動関数が空間反転でどう変換されるかで定まる．バリオン8重項とバリオン10重項はともに基底状態で軌道角運動量は励起されていないので，その波動関数は方向依存性がなく，空間反転について偶関数になる．したがって，これらはすべて$+1$の固有パリティをもつ．

Ω^-以外の10重項バリオンB_{10}はすべて強い相互作用によって8重項バリオンB_8とスピン・パリティが0^-の擬スカラーメソンM_Pに崩壊する．

$$B_{10}\longrightarrow B_8+M_P \tag{9.15}$$

この崩壊において角運動量の保存則からは，終状態の2粒子の間の軌道角運動量は $L = 1$ と $L = 2$ がゆるされるが，パリティの保存則から，終状態のパリティ $\eta_P = -(-1)^L$ も $+1$，したがって，$L = 1$ のP波だけがゆるされる．実験結果はこのとおりになっている．

9.4 メソン

メソンもアイソスピンによって分類される．メソンはクォークと反クォークを含むので，この分類を調べるには，まず，反クォークがアイソスピン空間の回転に対してどのように変換するかを知らなければならない．

反クォークの波動関数は本質的にはクォークの波動関数の複素共役なので，u, d クォークが (9.7) 式で変換するとき，$\bar{\mathrm{u}}, \bar{\mathrm{d}}$ の波動関数は

$$\begin{pmatrix} \psi_{\bar{\mathrm{u}}} \\ \psi_{\bar{\mathrm{d}}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\bar{\mathrm{u}}} \\ \psi'_{\bar{\mathrm{d}}} \end{pmatrix} = e^{-i\sum_{a=1}^{3}\theta^a I_a^*} \begin{pmatrix} \psi_{\bar{\mathrm{u}}} \\ \psi_{\bar{\mathrm{d}}} \end{pmatrix} \tag{9.16}$$

と変換する．パウリ行列の性質 $\sigma^{a*} = -\sigma^2\sigma^a\sigma^2$ および $(\sigma^2)^2 = 1$ を用いると，変換行列は

$$e^{-i\sum_{a=1}^{3}\theta^a I_a^*} = e^{i\sum_{a=1}^{3}\theta^a \sigma^2 I_a \sigma^2} = \sigma^2 e^{i\sum_{a=1}^{3}\theta^a I_a}\sigma^2 \tag{9.17}$$

と表される．(9.16) に左から $i\sigma^2$ をかけることにより，この変換式は次のように表現できる．

$$\begin{pmatrix} \psi_{\bar{\mathrm{d}}} \\ -\psi_{\bar{\mathrm{u}}} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\bar{\mathrm{d}}} \\ -\psi'_{\bar{\mathrm{u}}} \end{pmatrix} = e^{i\sum_{a=1}^{3}\theta^a I_a} \begin{pmatrix} \psi_{\bar{\mathrm{d}}} \\ -\psi_{\bar{\mathrm{u}}} \end{pmatrix} \tag{9.18}$$

すなわち $\bar{\mathrm{d}}$ が $I_3 = 1/2$ の成分で，$-\bar{\mathrm{u}}$ が $I_3 = -1/2$ の成分として $I = 1/2$ のアイソ2重項をなしている．したがって，スピンの合成則 (8.40),(8.41) と同様に，$(\bar{\mathrm{d}}, -\bar{\mathrm{u}})$ と (u, d) からアイソスピン $I = 1$ を合成すると $I_3 = (1, 0, -1)$ の成分は

$$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{u}\ , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} + \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})\ , \qquad -\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d} \tag{9.19}$$

となる．他方

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} + \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}) \tag{9.20}$$

は変換に対して不変な状態，すなわち$I=0$のアイソスカラーである．πメソンやρメソンは3種の荷電状態がほぼ縮退しており，それらは$I=1$のアイソベクトルである．それらのクォーク組成は，ともに(9.19)で与えられる．

u, d, sのクォーク・フレーバーに限って，基底状態のメソンを分類してみよう．クォークと反クォークが1個ずつ含まれるメソンの状態は，クォーク・フレーバーの組合せとしては全部で$3\times3=9$種類可能である．行列で表すと

$$|M^f{}_g\rangle = |\bar{\mathrm{q}}_g \mathrm{q}^f\rangle = \begin{pmatrix} |\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}\rangle & |\bar{\mathrm{d}}\mathrm{u}\rangle & |\bar{\mathrm{s}}\mathrm{u}\rangle \\ |\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d}\rangle & |\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}\rangle & |\bar{\mathrm{s}}\mathrm{d}\rangle \\ |\bar{\mathrm{u}}\mathrm{s}\rangle & |\bar{\mathrm{d}}\mathrm{s}\rangle & |\bar{\mathrm{s}}\mathrm{s}\rangle \end{pmatrix} \tag{9.21}$$

である．$SU(3)$の変換(9.10)のもとでこれらは

$$|M^f{}_g\rangle \to |M^f{}_g\rangle' = \sum_{h,l=\mathrm{u,d,s}} U^f{}_h |M^h{}_l\rangle U^{-1}{}^l{}_g \tag{9.22}$$

と変換する．これらをアイソスピンI, I_3およびX_sの固有状態になるようにしたものが強い相互作用のハミルトニアンの固有状態，すなわちメソンの状態である．(9.21)の非対角成分はそのままメソンの状態になるが，対角成分に1つだけ不確定さが生じる．$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})$および$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{s}$はともに$I=0, X_\mathrm{s}=0$なので，これら2つの状態の任意の重ね合わせもまた$I=0, X_\mathrm{s}=0$であり，どのような重みで重ね合わせた状態がハミルトニアンの固有状態になるかは，アイソスピンとフレーバーの保存則だけでは定まらない．実験的な情報をもとに，第0近似でそれらを書き下すと，スピン・パリティが$J^{PC}=0^{-+}$のメソン$\mathrm{M_P}$は表9.3，スピン・パリティが$J^{PC}=1^{--}$のメソン$\mathrm{M_V}$は表9.4となる（記号J^{PC}はJがメソンのスピン，Pはパリティη_P，Cは真性中性粒子の荷電共役パリティη_Cを表す）．実際には真性中性粒子ηとη'，およびωとϕはわずかに混合した状態が本当のメソンの状態として実現されている．

$J^{PC}=0^{-+}$と$J^{PC}=1^{--}$の真性中性粒子η, η', ω, ϕの第0近似のクォーク組成の大きな違いは，量子色力学によって以下のように理解できる．クォーク・フレーバーqのクォーク反クォーク状態$\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}$は，強い相互作用によってクォークが対消滅し，別のクォーク・フレーバーq'の状態$\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}'$への遷移

$$|\bar{\mathrm{q}}\mathrm{q}\rangle \longleftrightarrow |\bar{\mathrm{q}}'\mathrm{q}'\rangle \tag{9.23}$$

の行列要素をもつ．このとき中間状態は一般にグルーオンの多粒子状態である．グルーオンはアイソスピンをもたないので，この遷移はアイソスピンが

表 9.3 0^{-+} メソン $\mathrm{M_P}(s=0)$

	質量	構成クォーク	X_s	I	I_3
K^+	493.7	$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{u}$	-1	$1/2$	$1/2$
K^0	497.6	$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{d}$			$-1/2$
π^+	139.6	$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{u}$			1
π^0	135.0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})$	0	1	0
π^-	139.6	$-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d}$			-1
η	547.9	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}-2\bar{\mathrm{s}}\mathrm{s})$	0	0	0
$\bar{\mathrm{K}}^0$	497.6	$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{s}$	1	$1/2$	$1/2$
K^-	493.7	$-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{s}$			$-1/2$
η'	957.8	$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}+\bar{\mathrm{s}}\mathrm{s})$	0	0	0

表 9.4 1^{--} メソン $\mathrm{M_V}(s=1)$

	質量	構成クォーク	X_s	I	I_3
K^{*+}	892	$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{u}$	-1	$1/2$	$1/2$
K^{*0}	896	$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{d}$			$-1/2$
ρ^+	768	$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{u}$			1
ρ^0		$\frac{1}{\sqrt{2}}(-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})$	0	1	0
ρ^-		$-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{d}$			-1
ω	782	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}+\bar{\mathrm{d}}\mathrm{d})$	0	0	0
$\bar{\mathrm{K}}^{*0}$	896	$\bar{\mathrm{d}}\mathrm{s}$	1	$1/2$	$1/2$
K^{*-}	892	$-\bar{\mathrm{u}}\mathrm{s}$			$-1/2$
ϕ	1019	$\bar{\mathrm{s}}\mathrm{s}$	0	0	0

$I=0$ のメソンの間でのみ可能である．この中間状態はもちろん色電荷の保存により無色でなければならないが，さらに，強い相互作用の空間反転対称性および荷電共役対称性により，空間反転パリティ η_P および荷電共役パリティ η_C の固有状態でなければならない．特に η_C の選択則が重要な役割をはたす．

グルーオン g^a $(a=1,2,3,\cdots,8)$ の状態を $SU(3)$ の3行3列の基底行列 T^a を用いて行列表現で $\mathcal{G}=\sum_{a=1}^{8}\mathrm{g}^aT^a$ と表そう．行列 $\mathcal{G}$ をいくつかかけあわせた後に tr をとることによって無色の状態が表される．グルーオンの荷電共役

変換は (8.27) により $\mathcal{G} \to -\mathcal{G}^T$ である（正エネルギーのグルーオンを正エネルギーの反グルーオンに変換するのだから，$\mathcal{G}^*$ ではなく $\mathcal{G}^T$ である）．まず，グルーオン 1 個の状態は $\mathrm{tr}\ \mathcal{G} = 0$ だから中間状態には寄与できない．グルーオン 2 個の状態は $\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(2)}]$ である．この状態を C 変換すると

$$\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(2)}] \to \mathrm{tr}\ [(-\mathcal{G}_{(1)}^T)(-\mathcal{G}_{(2)}^T)] = \mathrm{tr}\ [(\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(1)})^T] = \mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(2)}] \tag{9.24}$$

となる．すなわち，グルーオン 2 個の状態は $\eta_C = +1$ の固有状態のみがゆるされる．グルーオン 3 個の状態は，無色にする取り方の 2 通りの可能性により，$\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)}]$ と $\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)}]$ が可能である．これらを (9.24) と同様に C 変換すると

$$\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)}] \to -\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)}] \tag{9.25}$$

$$\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)}] \to -\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)}] \tag{9.26}$$

となる．したがって，これらの和と差の状態は

$$\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}(\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)} + \mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)})] \to -\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}(\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)} + \mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)})] \tag{9.27}$$

$$\mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}(\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)} - \mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)})] \to \mathrm{tr}\ [\mathcal{G}_{(1)}(\mathcal{G}_{(2)}\mathcal{G}_{(3)} - \mathcal{G}_{(3)}\mathcal{G}_{(2)})] \tag{9.28}$$

と変換するので，それぞれ $\eta_C = -1$，$\eta_C = +1$ の固有状態である．グルーオンが 4 個以上の状態も $\eta_C = -1$ と $\eta_C = +1$ の両固有状態が可能である．

グルーオン 2 個の中間状態は C パリティが $\eta_C = +1$ だから $J^{PC} = 0^{-+}$ のメソンにおける遷移 (9.23) に寄与できる．この状態が角運動量が 0 で，さらに空間反転のパリティも $\eta_P = -1$ になりうることは，それらの量子数をもったグルーオン場の演算子が

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{tr}\ G_{\mu\nu}G_{\rho\sigma} \tag{9.29}$$

（$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は 4 階の完全反対称テンソル ($\epsilon^{0123} = 1$)）と構成できることで理解できる．他方 $J^{PC} = 1^{--}$ のメソンにおいては，C パリティの保存により，中間状態には少なくとも 3 個以上のグルーオンが生成されなければならず，遷移は起りにくくなる．この遷移の強さと s クォークの質量 m_s が u, d クォークの質量に比べて少し重たいこととの間の微妙な兼ね合いでメソンの質量固有状態が定まっている．

$J^{PC}=0^{-+}$ のメソンにおいては遷移の強さに対して $m_{\rm s}$ が第0近似で無視できて，メソンの質量固有状態は遷移のエネルギーの固有状態で決まる．遷移は u, d, s すべてのクォーク・フレーバーの間で等しく起るので，そのハミルトニアン $\Delta\mathcal{H}$ は

$$\Delta\mathcal{H}(遷移)=\Delta E\Big[|\bar{\rm u}{\rm u}\rangle+|\bar{\rm d}{\rm d}\rangle+|\bar{\rm s}{\rm s}\rangle\Big]\Big[\langle\bar{\rm u}{\rm u}|+\langle\bar{\rm d}{\rm d}|+\langle\bar{\rm s}{\rm s}|\Big] \tag{9.30}$$

となる．これは $\frac{1}{\sqrt{3}}(|\bar{\rm u}{\rm u}\rangle+|\bar{\rm d}{\rm d}\rangle+|\bar{\rm s}{\rm s}\rangle)$ の状態にのみエネルギーを与える．その結果 $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\rm u}{\rm u}+\bar{\rm d}{\rm d})$ と $\bar{\rm s}{\rm s}$ が大きく混ざった状態 η と η' が質量固有状態として実現される．遷移によるエネルギーは η には効かず，η' の質量にのみ反映される．

$$\Delta\mathcal{H}|\eta\rangle=0\ ,\qquad \Delta\mathcal{H}|\eta'\rangle=3\Delta E|\eta'\rangle \tag{9.31}$$

そのため η' の質量は $J^{PC}=0^{-+}$ のメソンの中では飛び抜けて大きい．$m_{\rm s}$ の効果が小さいということは，u, d, s の間の $SU(3)$ 対称性がかなり良いことを意味している． $J^{PC}=0^{-+}$ のメソンの表の中で，η' は変換 (9.22) のもとで不変な $SU(3)$ 1重項 $|\eta'\rangle\propto{\rm tr}|M\rangle$ をなしており，残りの8個のメソンはこの変換で互いに移り変わる $SU(3)$ 8重項になっている．

$J^{PC}=1^{--}$ のメソンにおいては遷移の効果が第0近似で無視できる．したがってメソンの質量固有状態は，s クォーク質量 $m_{\rm s}$ がメソンの質量に与える効果

$$\Delta\mathcal{H}(質量)=2m_{\rm s}c^2|\bar{\rm s}{\rm s}\rangle\langle\bar{\rm s}{\rm s}| \tag{9.32}$$

が対角化されるように定まる．その固有ベクトルは $\bar{\rm s}{\rm s}$ と $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{\rm u}{\rm u}+\bar{\rm d}{\rm d})$ である．その結果 $m_{\rm s}$ は ω の質量 m_ω には効かず ϕ の質量 m_ϕ にのみ寄与する．

$$\Delta\mathcal{H}|\omega\rangle=0\ ,\qquad \Delta\mathcal{H}|\phi\rangle=2m_{\rm s}c^2|\phi\rangle \tag{9.33}$$

そのため m_ϕ は m_ω より $2m_{\rm s}\sim 240\ {\rm MeV}/c^2$ ほど大きくなっている．

9.5 ハドロンの崩壊

9.3節および9.4節で u, d, s クォークで構成されたハドロンについて，スピンが1/2と3/2のバリオンおよび0と1のメソンの基底状態の分類を与えた

が，c, b, t を含んだハドロンも，同様にスピン，クォーク・フレーバーおよびアイソスピンによって分類される．ハドロンはクォークの複合系なので，これら基底状態のほかに励起状態も無数に存在する．励起状態のハドロンは，その励起エネルギーをクォーク・反クォーク対生成に利用して，より軽い粒子の系へと崩壊する．これらの崩壊は強い相互作用によるので，その対称性であるパリティ，荷電共役パリティ，クォーク・フレーバー，アイソスピンは保存される．

強い相互作用による崩壊は表 9.4 のスピン 1 のメソンおよび表 9.2 のスピン 3/2 のバリオン（Ω^- 以外）についてもゆるされている．これらは比較的大きな崩壊幅をもち，したがって，それらの寿命はかなり短い．他方，表 9.3 のスピン 0 のメソン（η, η' 以外）および表 9.1 のスピン 1/2 のバリオンは，強い相互作用による崩壊がすべてエネルギーしきい値によって禁止されている．たとえば $\Sigma^+ \to \Lambda^0 + \pi^+$, $\Sigma^+ \to \mathrm{p} + \bar{\mathrm{K}}^0$ 等量子数の保存則を満たす過程は，終状態の粒子の質量の和が始状態の粒子の質量よりも大きくなるため，エネルギーの保存則を満たすことができない．これらの粒子が崩壊するためには強い相互作用以外の力が作用しなければならない．電磁相互作用はクォーク・フレーバーは保存するがアイソスピン対称性を破るので，$\Sigma^0 \to \Lambda + \gamma$ や，真性中性粒子の崩壊 $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ 等を起すことができる．これら以外の粒子はクォーク・フレーバーを変化させる W ボソンによる弱い相互作用の力によってのみ崩壊が可能となり，それらの寿命は大変長くなる．たとえば s クォークを含んだハドロンの崩壊は仮想粒子状態の W の生成を経由した

$$\mathrm{s} \to \mathrm{u} + \mathrm{d} + \bar{\mathrm{u}}, \quad \mathrm{s} \to \mathrm{u} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}, \quad \mathrm{s} \to \mathrm{u} + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{9.34}$$

の過程を通して起り，

$$\Xi^0 \to \Lambda + \pi^0 \tag{9.35}$$

$$\Xi^- \to \Lambda + \pi^- \tag{9.36}$$

$$\Sigma^+ \to \mathrm{p} + \pi^0 \tag{9.37}$$

$$\to \mathrm{n} + \pi^+ \tag{9.38}$$

$$\Sigma^- \to \mathrm{n} + \pi^- \tag{9.39}$$

$$\Lambda \to \mathrm{p} + \pi^- \tag{9.40}$$

$$\to \mathrm{n} + \pi^0 \tag{9.41}$$

$$\mathrm{K}^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu \tag{9.42}$$

$$\to \pi^- + \pi^0 \tag{9.43}$$

$$\to \pi^- + \pi^- + \pi^+ \tag{9.44}$$

などが主な崩壊のモードになっている.

最後のKメソンの π メソン2個および3個への崩壊から弱い相互作用の際立った特徴が読み取れる. 8.6節で見たようにスピンが0の π やKは空間反転のもとで, パリティが $\eta_P = -1$ の固有状態として変換する. 終状態が2個の π の場合, それらの間の軌道角運動量 L は角運動量の保存則により $L=0$ の S 波, すなわち偶状態である. したがって終状態は空間反転のもとで $\mathcal{P}|\pi^-\pi^0\rangle = \eta_P|\pi^-\pi^0\rangle$, $\eta_P = (-1)^2(-1)^L = +1$ の固有状態として変換する. これは始状態 $|\mathrm{K}^-\rangle$ のパリティ $\eta_P = -1$ と食い違っている. すなわち, この崩壊過程はパリティが保存していない.

次に, 終状態が3個の π への崩壊を考察しよう. 3個の π の状態の基底ベクトルを $|((\pi^-\pi^-)_{L_1}\pi^+)_{L_2}\rangle$ と表してみよう. 2個の π^- の相対運動に付随する軌道角運動量を L_1 とし, $(\pi^-\pi^-)$ と π^+ の相対運動に付随する軌道角運動量を L_2 とおいている. 任意の状態はこの基底ベクトルの重ね合わせで表すことができる. 軌道角運動量 L_1 と L_2 を合成した全角運動量 L は, 始状態 $|\mathrm{K}^-\rangle$ のスピンが0であるので角運動量の保存則により $L = 0$ である. したがって $L_1 = L_2$ の条件が課される. この終状態を空間反転すると $\mathcal{P}|((\pi^-\pi^-)_{L_1}\pi^+)_{L_2}\rangle = \eta_P|((\pi^-\pi^-)_{L_1}\pi^+)_{L_2}\rangle$, $\eta_P = (-1)^3(-1)^{L_1}(-1)^{L_2} = -1$ となる. したがって3個の π への崩壊はパリティを保存している.

バリオンの崩壊においても同様なことが起っている. 始状態のバリオンのスピンは $s=1/2$ であり, 終状態のバリオンも $s=1/2$, メソンは $s=0$ だから, 角運動量の保存則により終状態におけるバリオンとメソンの間の軌道角運動量 L は, $L=0$ と $L=1$ の2通りがゆるされる. クォークの固有パリティを $\eta_P = +1$ と約束するとバリオンの固有パリティも $\eta_P = (+1)^3 = +1$ である. 終状態のバリオンとメソンの系のパリティは $\eta_P = (+1)(-1)(-1)^L = -(-1)^L$ となる. $L=1$ の P 波であればパリティは保存し, $L=0$ の S 波であれば保存しない. 実験結果によると S 波と P 波はほぼ同じ大きさで共存している.

自習問題

[1] クォーク・フレーバー $f, g = \mathrm{u}, \mathrm{d}, \mathrm{s}$ について3行3列の添字をもった3個のクォークからなる状態 $|\mathrm{B}^f{}_g\rangle$ を，3階の完全反対称テンソル ϵ_{ghl} を用いて

$$|\mathrm{B}^f{}_g\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{6}} \sum_{h,l=\mathrm{u,d,s}} \epsilon_{ghl} \left(|\mathrm{q}^f \mathrm{q}^h \mathrm{q}^l\rangle + |\mathrm{q}^h \mathrm{q}^f \mathrm{q}^l\rangle \right) \tag{9.45}$$

と定義すると $\sum_f |\mathrm{B}^f{}_f\rangle = 0$ である．q^f を (9.10) に従って $SU(3)$ 変換 $\mathrm{q}^f \to \sum_g U^f{}_g \mathrm{q}^g$ したとき，$|\mathrm{B}\rangle$ が

$$|\mathrm{B}\rangle \to |\mathrm{B}\rangle' = U|\mathrm{B}\rangle U^{-1} \tag{9.46}$$

と変換することを示せ（(2.33),(2.34) に注意せよ）．したがって $|\mathrm{B}\rangle$ は $SU(3)$ の随伴表現（8次元）として変換する．また $|\mathrm{B}\rangle$ を成分で表すことにより，(9.13) を確かめよ．

[2] ω メソンの崩壊幅 $\Gamma_\omega(= 8.4\ \mathrm{MeV})$ は ρ メソンの崩壊幅 $\Gamma_\rho(= 152\ \mathrm{MeV})$ に比べて大変小さい．この要因は，ρ は2個の π メソンに崩壊するが，ω はほとんど3個の π メソンに崩壊し，2個の π メソンへの崩壊が起らないことによる．アイソスピンが $I = 1$ の π メソン2個の系の合成アイソスピンは $I = 0, 1, 2$ が可能である．$I = 0, 1$ のアイソスピンの状態は

$$|I = 0, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle \right) \tag{9.47}$$

$$|I = 1, I_3 = 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^0\rangle - |\pi^0\pi^+\rangle \right) \tag{9.48}$$

$$|I = 1, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^+\rangle \right) \tag{9.49}$$

$$|I = 1, I_3 = -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\pi^0\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^0\rangle \right) \tag{9.50}$$

で与えられる．アイソスピンまで含めた強い相互作用の保存則のもとで，$\rho \to \pi + \pi$ はゆるされるが $\omega \to \pi + \pi$ が禁止される理由を，角運動量の保存則および π メソンの統計性にもとづいて考察せよ．

コラム：パリティの破れの発見

素粒子物理学の発展の歴史の中で，長い間，空間反転対称性は自然法則の厳格な原理として成り立っているものだと思われていた．それが迷信であり，弱い相互作用においてはその対称性が破れている可能性があると認識されるようになったのは，1956年に発表されたリーとヤンによる論文による．その理論的予言を受けて1957年にウー達によって実施された記念碑的実験によって，原子核のβ崩壊の中で初めてパリティの破れが発見された．

ウー達が注目したのは静止したコバルト原子核がβ崩壊によってニッケル原子核の励起状態に遷移する過程

$$ {}^{60}_{27}\mathrm{Co} \to {}^{60}_{28}\mathrm{Ni}^* + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} $$

であった．空間反転対称性が破れるかどうかを調べるには，空間反転のもとで反転する極性ベクトルと，不変のままの軸性ベクトルが同時に関わる反応を見なければならない．コバルトは$s = 5$の核スピン$\vec{S}$をもっており，それは角運動量だから軸性ベクトルである．放出される電子e^-の運動量は極性ベクトルである．β崩壊においてe^-が核スピン$\vec{S}$の向きと同じ方向に放出されたとしよう．この現象を空間反転すると，e^-は$\vec{S}$の向きの逆方向に放出される現象になる．空間反転対称性が成り立っていたら，これら2つの現象は同じ確率で起るはずである．

ウー達は核スピン$\vec{S}$を固定するために，十分低温に冷却したコバルトを磁場の中においた．これにより，$\vec{S}$は磁針のように磁場の方向（z軸）を向き，$S_z = 5\hbar$の状態になる．これだけの準備のもとに，崩壊過程が観測された．そしてパリティの破れが発見された．崩壊で生成された電子は磁場の向きと同じ方向に放出される確率が，磁場と反対方向に放出される確率に比べてとても小さかったのである．

電子が磁場と反対方向に放出される過程を，角運動量のz成分J_zの保存則にもとづいて考察しよう．この崩壊過程を通して原子核はほとんど静止したままであり，e^-と$\bar{\nu}_\mathrm{e}$は（z軸上）ほぼ逆方向に放出される．軌道角運動量は運動量と垂直だからJ_zには寄与しない．Ni^*の核スピンは$s = 4$であるので，終状態が$J_z = 5\hbar$になるのは，放出されたe^-と$\bar{\nu}_\mathrm{e}$の$s = 1/2$のスピンがNi^*の核スピンとともにすべて磁場の方向を向いて5=4+1/2+1/2となるときに限られる．(1.45)で定義したヘリシティで表すと，電子e^-はその運動方向と逆向きのスピン状態，すなわち$\lambda_\mathrm{e} = -1/2$状態が，反ニュートリノ$\bar{\nu}_\mathrm{e}$は運動方向と同じ向きの$\lambda_{\bar{\nu}} = +1/2$状態がこの$\beta$崩壊過程に関与している．

コバルトの崩壊に限らず，あらゆる粒子のβ崩壊において，そこに現れる反ニュートリノ$\bar{\nu}$は正のヘリシティ$(\lambda = +1/2)$の状態のみである．また，その反粒子であるニュートリノνは逆に負のヘリシティ$(\lambda = -1/2)$の状態のみが現れる．

CHAPTER 10

素粒子の弱い相互作用

重たいクォークやレプトンはWが媒介する弱い相互作用によって，軽いクォークやレプトンへと崩壊する．弱い相互作用はWボソンだけでなくZボソンも関与する．それらの力は空間反転対称性や荷電共役対称性を大きく破っている．この章ではこれらWとZの弱い相互作用の概要を示す．それらは強い相互作用や電磁相互作用と同様，やはりゲージ原理にもとづいたゲージ理論として実現されていることが明らかになる．

10.1 クォークやレプトンのカイラリティ

クォークやレプトンなど，スピンが1/2の粒子の運動はディラック方程式で記述され，波動関数 ψ は4成分で構成されていた．この運動方程式には4個の4行4列のディラック行列 γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ が登場するが，それらを使って

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{10.1}$$

を定義しよう．この行列は $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$，$(\gamma^5)^2 = 1$ を満たすが，さらに，すべての γ^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ と反可換

$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0 \tag{10.2}$$

である．γ^5 は固有値 -1 と $+1$ を2つずつもっており，次の2組の行列

$$L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\ , \quad R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \tag{10.3}$$

は，γ^5 の固有値 -1 と $+1$ の固有状態の射影行列

$$\gamma^5 L = -L\ , \ \gamma^5 R = R \tag{10.4}$$

になっている．これらは

$$\gamma^\mu L = R\gamma^\mu \ , \quad \gamma^\mu R = L\gamma^\mu \tag{10.5}$$

を満たす．これらの射影行列によって波動関数 ψ はそれぞれの固有状態に分解される．

$$\psi_L \equiv L\psi \ , \qquad \psi_R \equiv R\psi \tag{10.6}$$

γ^5 の固有値はカイラリティと呼ばれ，-1 のものは左巻き状態 ψ_L，$+1$ のものは右巻き状態 ψ_R と呼ばれる．

質量 m の自由粒子のディラック方程式をカイラリティ分解すると (10.5) により

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_L - mc\psi_R = 0 \tag{10.7}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_R - mc\psi_L = 0 \tag{10.8}$$

の2組の方程式になる．質量が0の粒子については，カイラリティの異なる ψ_L と ψ_R は完全に分離した独立の方程式となるが，質量をもった粒子においては，質量の効果によって ψ_L の状態と ψ_R の状態の間で遷移が起っている．

これは新しい見方を可能にする．今，粒子が電子 e だとすると，ψ_L は e_L という粒子の運動状態を表し，ψ_R は e_R という別の粒子の運動状態を表しており，質量はそれら2種類の粒子の間の「相互作用」である．この「質量相互作用」の効果によって e_L と e_R の間の絶え間ない遷移が起っている状態が従来電子 e と呼んできたものの運動状態である．これは単なるものの言い換えにすぎないように見えるが，実は自然界に存在する粒子の根元的な理解にとって本質的である．ニュートリノの質量は実験的には上限しかわかっていないが，これまで左巻きの ν_L しか観測されていない．ニュートリノはレプトンであり，電荷が0なので，強い相互作用も電磁相互作用も起さず，弱い相互作用を通してのみ反応に関与するが，そこに登場するのは ν_L のみである．ν_R が自然界に存在しているのかどうか，現在までのところ定かではないが，もし存在するとしたらそれは ν_L とは全く異なった運動法則に従っている．

この新しい観点から，電磁相互作用まで含めた電子の運動方程式 (6.14) を次式で示すようにカイラリティ分解して見直してみよう．

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu\right)\psi_L - mc\psi_R = 0 \tag{10.9}$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu\right)\psi_R - mc\psi_L = 0 \tag{10.10}$$

となる．この2組の運動方程式は ψ_L と ψ_R の入れ替えに対して全く対称であり，e_L と e_R は電磁相互作用の仕方が全く同等である．この事情はクォーク q の運動方程式 (9.2) においても同じで，q_L と q_R は電磁および強い相互作用の仕方が同等である．すなわち，強い相互作用と電磁相互作用の力学の法則は，左巻き粒子と右巻き粒子を置き換えても不変である．これらの相互作用においてパリティが保存されていた背後にはこの不変性が潜んでいた．空間反転の操作 (8.13) はカイラリティ分解すると

$$\psi_L(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi_L^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) = \gamma^0\psi_R(t,-\vec{x}), \quad \psi_R(t,\vec{x}) \longrightarrow \psi_R^{\mathrm{P}}(t,\vec{x}) = \gamma^0\psi_L(t,-\vec{x}) \tag{10.11}$$

となり，ψ_L と ψ_R を入れ替える操作である．

しかし，本来，左巻き粒子と右巻き粒子は別々の粒子なのだから，それらが全く同じ運動法則に従わなければならない理由は存在しない．それらの相互作用は異なっていてよいはずである．事実，弱い相互作用はそうなっている．W ボソンは左巻き粒子（e_L や q_L）とのみ相互作用し，右巻き粒子（e_R や q_R）とは全く相互作用をしない．また，Z ボソンの相互作用の強さも，左巻き粒子と右巻き粒子で異なっている．その結果，弱い相互作用において空間反転対称性は大きく破れている．

10.2 W ボソンとレプトンの弱い相互作用

弱い相互作用の力は電荷が ±1 の $\mathrm{W}^\pm$ ボソンと中性の Z^0 ボソンによって媒介される．3.2 節で述べたように，クォークやレプトンは図 3.10 の $\mathrm{W}^\pm, \mathrm{Z}^0$ の吸収・放出を素過程として弱い相互作用の反応を起している．

まず，第1世代のレプトン $\mathrm{e}^-, \nu_\mathrm{e}$ と $\mathrm{W}^\pm$ の相互作用を考察しよう．$\mathrm{W}^\pm$ の吸収・放出の素過程は

$$\nu_{\mathrm{e}L} + \mathrm{W}^- \longrightarrow \mathrm{e}_L^- \ , \quad \nu_{\mathrm{e}L} \longrightarrow \mathrm{e}_L^- + \mathrm{W}^+ \tag{10.12}$$

$$\mathrm{e}_L^- + \mathrm{W}^+ \longrightarrow \nu_{\mathrm{e}L} \ , \quad \mathrm{e}_L^- \longrightarrow \nu_{\mathrm{e}L} + \mathrm{W}^- \tag{10.13}$$

である．レプトンの質量を無視して，この相互作用をそれぞれの波動関数の運

動方程式として表現すると

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{\mathrm{e}L} - \frac{g}{\sqrt{2}c}\gamma^\mu W_\mu^- \psi_{\nu_\mathrm{e}L} = 0 \tag{10.14}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{\nu_\mathrm{e}L} - \frac{g}{\sqrt{2}c}\gamma^\mu W_\mu^+ \psi_{\mathrm{e}L} = 0 \tag{10.15}$$

となる．ここに，g は相互作用の結合定数であり，後の便宜のために $\sqrt{2}$ を入れて定義している．3.2 節で勉強したように，これらの式 の第 2 項を右辺へもっていくと，それは波源を与えるのであった．たとえば (10.14) は，すべてが正エネルギーの解のときには，$\nu_{\mathrm{e}L}$ が時空点 x^μ で W^- を吸収し，それが波源となって，e_L が飛び去っていくように読む．

8.3 節で見たように，粒子の運動方程式は同時に反粒子の運動方程式をも表している．粒子と反粒子の波動関数の関係 (8.20) を $\psi_L = L\psi$ に適用すると

$$(\psi_L)^c \equiv C\gamma^{0^T}(L\psi)^* = RC\gamma^{0^T}(\psi)^* = (\psi^c)_R \tag{10.16}$$

すなわち，ψ_L の反粒子は右巻きカイラリティの状態 $(\psi^c)_R$ になる．したがって，反粒子 $\mathrm{e}^+, \bar{\nu}_\mathrm{e}$ は右巻きカイラリティ粒子のみが $\mathrm{W}^\pm$ と相互作用をし，その素過程は

$$\bar{\nu}_{\mathrm{e}R} + \mathrm{W}^+ \longrightarrow \mathrm{e}_R^+ \ , \quad \bar{\nu}_{\mathrm{e}R} \longrightarrow \mathrm{e}_R^+ + \mathrm{W}^- \tag{10.17}$$

$$\mathrm{e}_R^+ + \mathrm{W}^- \longrightarrow \bar{\nu}_{\mathrm{e}R} \ , \quad \mathrm{e}_R^+ \longrightarrow \bar{\nu}_{\mathrm{e}R} + \mathrm{W}^+ \tag{10.18}$$

となる．さらに $\mathrm{W}^\pm$ からレプトン・反レプトンの対生成

$$\mathrm{W}^- \longrightarrow \mathrm{e}_L^- + \bar{\nu}_{\mathrm{e}R} \ , \quad \mathrm{W}^+ \longrightarrow \mathrm{e}_R^+ + \nu_{\mathrm{e}L} \tag{10.19}$$

や逆の対消滅も起る．

ヘリシティ (1.45) は γ^5 と $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$ を用いると

$$h = \frac{\hbar}{2}\gamma^5 \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{10.20}$$

と表される．0 質量のディラック方程式 $c\vec{\alpha}\cdot\vec{p}u = c|\vec{p}|u$ に従うニュートリノにとっては $h = \frac{\hbar}{2}\gamma^5$ となるので，左巻きカイラリティの ν_L はヘリシティは $\lambda_\nu = -\frac{1}{2}$，右巻きカイラリティの $\bar{\nu}_R$ はヘリシティは $\lambda_{\bar{\nu}} = +\frac{1}{2}$ と定まっている．前章の終りで見た β 崩壊の観測事実はこの反映として実現されている．電

子のように質量 m をもっている粒子も，大きなエネルギー $E \gg mc^2$ をもって運動しているときには，カイラリティ状態とヘリシティ状態は $O(mc^2/E)$ を無視する近似で一致する．

$\mathrm{W}^\pm$ の質量 m_W, 崩壊幅 Γ_W, および $\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ の崩壊の分岐比 $R_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e})$ の測定値は

$$m_\mathrm{W} = 80.40\ \mathrm{GeV}/c^2\ ,\quad \Gamma_\mathrm{W} = 2.09\ \mathrm{GeV}\ ,\quad R_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}) = 0.11 \tag{10.21}$$

が得られている．$\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ の崩壊の部分幅 $\Gamma_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}) \equiv R_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e})\Gamma_\mathrm{W}$ を場の量子論の方法に従って計算すると，m_W に比べて m_e を無視する近似で

$$\Gamma_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}) = \frac{1}{24\pi}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{m_\mathrm{W}c}{\hbar} \tag{10.22}$$

が求まる．$\Gamma_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e})$ は崩壊の確率振幅，すなわち W の結合定数 $g/\sqrt{2}$ の絶対値の 2 乗に比例する．Γ_W はエネルギーの次元をもつので，次元を合せるように m_W が現れている．これから W の相互作用の結合定数として $\alpha_\mathrm{W} \equiv g^2/(4\pi\hbar c) \simeq 1/30$ が得られるが，それは電磁相互作用の $\alpha \simeq 1/137$ よりもかなり大きい．

第 2 世代や第 3 世代のレプトンと $\mathrm{W}^\pm$ の相互作用も，(10.14) および (10.15) と同形になっている．$\mathrm{W}^\pm$ の相互作用の注目すべき特徴は，その結合定数 g がレプトンの世代によらず，普遍的なことである．この普遍性は $\mathrm{W}^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ および $\mathrm{W}^+ \to \tau^+ + \nu_\tau$ への崩壊の分岐比の測定値が $\mathrm{W}^+ \to \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ の分岐比と等しいこと

$$R_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e}) = R_\mathrm{W}(\mu^+\nu_\mu) = R_\mathrm{W}(\tau^+\nu_\tau) = 0.11 \tag{10.23}$$

によって確認できる．

W の相互作用の普遍性は μ や τ の崩壊幅にも反映されている．μ^- の崩壊 $\mu^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ は図 10.1 のように，大きな質量 m_W をもった W^- の仮想粒子状態を経由して起り，その崩壊振幅は

$$A(\mu^- \to \nu_\mu + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}) = \left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{\hbar^2}{m_\mathrm{W}^2 c^2} \equiv 2\sqrt{2}G_F \tag{10.24}$$

で与えられる．W^- とレプトンとの相互作用の強さが 2 つの相互作用点それぞれに $g/\sqrt{2}$ を与え，2 つの相互作用点の間を仮想粒子状態の W^- が走る効

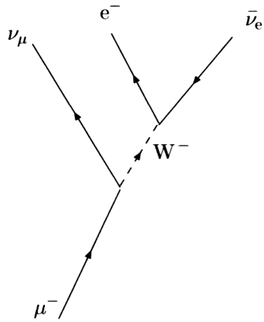


図 10.1　μ^- の崩壊

果が $\hbar^2/(m_W^2c^2)$ を与えている．仮想粒子の寄与は (3.8) の振幅 $\hbar^2/(m^2c^2-p^2)$ で与えられるのであったが，W^- の 4 元運動量の 2 乗は $p^2=(p_{\mu^-}-p_{\nu_\mu})^2<m_\mu^2c^2\ll m_W^2c^2$ なので p^2 は無視することができる．

(10.24) で定義された G_F はフェルミ結合定数と呼ばれ，その値は μ^- の崩壊幅の測定値の詳細な解析を通して以下のように精度よく求まっている．

$$G_F/(\hbar c)^3=1.16636\times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2} \tag{10.25}$$

この値から W の結合定数 g として

$$\alpha_W\equiv\frac{g^2}{4\pi\hbar c}\simeq\frac{1}{29.46} \tag{10.26}$$

が得られる．

3.4 節で見たように，$W^\pm$ や Z^0 などの重たい粒子の交換による反応は，力の到達距離が短いので，W^- の生成とそれに引き続いて起る W^- の崩壊はほぼ同一時刻，同一地点で起る．したがってこの反応は，全部で 4 個のフェルミオンが関与した図 10.2 のような 1 つの相互作用とみなすことができる．このような相互作用は 4 フェルミ相互作用と呼ばれる．その相互作用の強さを与えるのがフェルミ結合定数 G_F である．

場の量子論の方法に従って (10.24) の崩壊振幅から μ^- の崩壊幅を求めると，e^- の質量 m_e を μ^- の質量 m_μ に比べて無視する近似で

$$\Gamma(\mu^-\to\nu_\mu+e^-+\bar{\nu}_e)=\frac{G_F^2(m_\mu c^2)^5}{192\pi^3(\hbar c)^6} \tag{10.27}$$

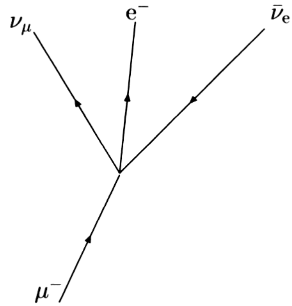


図 10.2 4フェルミ相互作用

が得られる．Γ はエネルギーの次元をもっているので，次元を合わせるように $m_\mu c^2$ の5乗が現れる．τ^- の崩壊においても，m_τ に対して m_e と m_μ を無視すると，結合定数 g の普遍性のもとで崩壊幅の間に関係式

$$\left(\frac{m_\tau}{m_\mu}\right)^5 \Gamma(\mu^- \to \nu_\mu + e^- + \bar{\nu}_e) \cong \Gamma(\tau^- \to \nu_\tau + e^- + \bar{\nu}_e)$$
$$\cong \Gamma(\tau^- \to \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu) \quad (10.28)$$

が成り立つ．実験結果はこれをよく満たしている（自習問題[2]参照)．

フェルミ結合定数 G_F は歴史的には中性子の β 崩壊 $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$ の4フェルミ結合定数として見いだされた．その値(10.25)が核子の質量($\simeq 1$ GeV/c^2)の逆2乗を単位として見たときにあまりにも小さかったため，この相互作用が弱い相互作用と呼ばれるようになった．しかし，G_F の値が小さいのはWボソンが核子に比べて100倍ほど重たいためであり，Wの相互作用の素過程の結合定数 g は(10.26)で求めたように，特別小さいわけではない

10.3 クォークの弱い相互作用

Wの結合定数の普遍性はクォークとの相互作用においても成り立っているが，その実現のされかたは多少複雑である．Wと相互作用するのはレプトンの場合と同様に，左巻きカイラリティのクォーク q_L および右巻きカイラリティの反クォーク $\bar{q}_R$ であるが，それらの相互作用はクォークの各世代の中で閉じていない．中性子の β 崩壊は素過程 $d_L \to u_L + W^-$ によって起るが，s

クォークを含んだハドロンの崩壊は素過程 $s_L \to u_L + W^-$ を通して起る．W の相互作用は，電荷 $-1/3$ のクォーク d, s, b と電荷 $2/3$ のクォーク u, c, t との間のすべての組合せについて素過程が存在しており，それぞれの結合定数はすべて異なった値になっている．それらの素過程の結合定数行列を

$$g\begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix} \tag{10.29}$$

と書こう．たとえば gV_{ub} は素過程 $b_L \to u_L + W^-$ の結合定数である．行列 V はキャビボ・小林・益川行列と呼ばれる．W の相互作用の普遍性は行列 V がユニタリー行列であることで実現されている．世代で分類されたクォーク d, s, b の代わりに，V でユニタリー変換された状態を

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}' \\ \mathrm{s}' \\ \mathrm{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d} \\ \mathrm{s} \\ \mathrm{b} \end{pmatrix} \tag{10.30}$$

とすると，$W^\pm$ の放出の素過程は

$$u_L \longrightarrow d'_L + W^+ \ , \quad d'_L \longrightarrow u_L + W^- \tag{10.31}$$

$$c_L \longrightarrow s'_L + W^+ \ , \quad s'_L \longrightarrow c_L + W^- \tag{10.32}$$

$$t_L \longrightarrow b'_L + W^+ \ , \quad b'_L \longrightarrow t_L + W^- \tag{10.33}$$

で与えられ，これらはすべて等しい結合定数 g で起る．また，吸収や対生成，対消滅もレプトンのときと同じである（自習問題 [3, 4, 5] 参照）．

クォークの波動関数の運動方程式は，クォークの質量および強・電磁相互作用の項を省略すると，レプトンの運動方程式 (10.14), (10.15) と同形の

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{\mathrm{d}'L} - \frac{g}{\sqrt{2}c}\gamma^\mu W_\mu^- \psi_{\mathrm{u}L} = 0 \tag{10.34}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{\mathrm{u}L} - \frac{g}{\sqrt{2}c}\gamma^\mu W_\mu^+ \psi_{\mathrm{d}'L} = 0 \tag{10.35}$$

等々となる．

10.4 かくれたゲージ対称性

強い相互作用は $SU(3)$ のゲージ原理によって支配されていた．グルーオンはすべてのクォークに等しい結合定数 g_s で相互作用を及ぼし，クォークの3つの色の間の遷移を起していた．

Wの吸収・放出においてレプトンやクォークは，次の各組

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L^- \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

の上下2成分の間で遷移を起し，しかもその結合定数はすべて g で等しい．このことは，Wによる弱い相互作用が強い相互作用や電磁相互作用と同様に，ゲージ原理によって支配されていることを強く示唆する．そのゲージ対称性は，(10.36) の各組を2行2列のユニタリー行列でゲージ変換する $SU(2)$ の対称性である．第1世代のレプトンの波動関数 $\psi_{\nu L}(x), \psi_{eL}(x)$ についてそれを書き下すと

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu L}(x) \\ \psi_{eL}(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\nu L}(x) \\ \psi'_{eL}(x) \end{pmatrix} = e^{i\sum_{a=1}^{3} \Lambda_a(x) I_a} \begin{pmatrix} \psi_{\nu L}(x) \\ \psi_{eL}(x) \end{pmatrix} \tag{10.37}$$

となる．基底行列 I_a は (6.61) に従い，パウリ行列を用いて

$$I_a = \frac{\sigma^a}{2}, \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.38}$$

とする．変換パラメター $\Lambda_a(x)$ は時空点 x の任意関数である．Wはこのゲージ変換に付随したゲージ場として存在している．この対称性はハドロンのアイソスピン対称性 (9.7) との類似性により，弱アイソスピンと呼ばれる．(10.36) の左巻きのレプトンとクォークはそれぞれが $I = 1/2$ の弱アイソ2重項をなしている．右巻き状態はWと相互作用をしないので，このゲージ変換のもとで不変であり，$I = 0$ の弱アイソ1重項となる．

ここで，電磁相互作用のことを思い出そう．それは $U(1)_Q$ のゲージ理論であった．そのゲージ変換 (6.13) をレプトンについて書き下すと

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu L}(x) \\ \psi_{eL}(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\nu L}(x) \\ \psi'_{eL}(x) \end{pmatrix} = e^{i\Lambda(x) Q_L} \begin{pmatrix} \psi_{\nu L}(x) \\ \psi_{eL}(x) \end{pmatrix} \tag{10.39}$$

$$\psi_{eR}(x) \longrightarrow \psi'_{eR}(x) = e^{i\Lambda(x)Q_R}\psi_{eR}(x) \tag{10.40}$$

となる．ここに

$$Q_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; Q_R = -1 \tag{10.41}$$

である．$SU(2)$ の変換 (10.37) で移り変わる2成分 $\psi_{\nu L}(x)$ と $\psi_{eL}(x)$ は電荷が異なるので $U(1)_Q$ の変換の受け方が異なる．強い相互作用のときには，クォークの3つの色の状態はすべて同じ電荷をもっていたので，$SU(3)$ のゲージ変換をしてもクォークの電荷は変化しなかった．その結果，$SU(3)$ と $U(1)_Q$ は全く独立のゲージ対称性として成り立ち得た．しかし，$SU(2)$ と $U(1)_Q$ の間は，そうはなっていない．電磁相互作用と弱い相互作用は相互にからみあったゲージ理論になる．

そのゲージ対称性は次の考察によって見いだされる．$\psi_L(x)$ の $U(1)_Q$ 変換 (10.39) は，等式 $Q_L = I_3 - 1/2$ により

$$e^{i\Lambda(x)Q_L} = e^{i\Lambda(x)\frac{-1}{2}}e^{i\Lambda(x)I_3} \tag{10.42}$$

と書ける．右側の変換 $e^{i\Lambda(x)I_3}$ は $SU(2)$ の変換（10.37）で $\Lambda_1(x) = \Lambda_2(x) = 0$, $\Lambda_3(x) = \Lambda(x)$ とおいたものなので，この変換に対する不変性は $SU(2)$ のゲージ原理によって保証される．したがって，$U(1)_Q$ の不変性は，$SU(2)$ に加えて，$\psi_L(x)$ と $\psi_R(x)$ について変換パラメター $\Lambda_Y(x)$ による位相変換

$$\begin{pmatrix} \psi_{\nu L}(x) \\ \psi_{eL}(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \psi'_{\nu L}(x) \\ \psi'_{eL}(x) \end{pmatrix} = e^{i\Lambda_Y(x)\frac{Y_L}{2}} \begin{pmatrix} \psi_{\nu L}(x) \\ \psi_{eL}(x) \end{pmatrix} \tag{10.43}$$

$$\psi_{eR}(x) \longrightarrow \psi'_{eR}(x) = e^{i\Lambda_Y(x)\frac{Y_R}{2}}\psi_{eR}(x) \tag{10.44}$$

についてのゲージ対称性が満たされていたら実現される．ここに $Y_L = -1, Y_R = -2$ である．このゲージ変換は弱ハイパーチャージ Y による $U(1)_Y$ ゲージ変換と呼ばれる．弱ハイパーチャージ Y，弱アイソスピンの第3成分 I_3，および電荷 Q の間には

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{10.45}$$

の関係式が左右両カイラリティの粒子について成り立つ．

10.5 $SU(2) \times U(1)_Y$ ゲージ理論

弱い相互作用と電磁相互作用は，2つのゲージ群 $SU(2)$ と $U(1)_Y$ を合せた $SU(2) \times U(1)_Y$ にもとづくゲージ原理で実現される．$SU(2)$ のゲージ場 W_μ はグルーオン場 (7.8) のときと同様，$W_\mu^\dagger = W_\mu, \mathrm{tr} W_\mu = 0$ を満たす2行2列の行列で表される．これを3種の実数場 $W_\mu^a (a = 1, 2, 3)$ により

$$W_\mu = \sum_{a=1}^{3} I_a W_\mu^a \tag{10.46}$$

と表そう．$U(1)_Y$ のゲージ場を B_μ と表すと，ゲージ対称なレプトンの運動方程式は（質量はまだ無視しておく）

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{g}{c}\gamma^\mu \sum_{a=1}^{3} I_a W_\mu^a - \frac{g'}{c}\gamma^\mu \frac{Y_L}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ \psi_{\mathrm{e}L} \end{pmatrix} = 0 \tag{10.47}$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{g'}{c}\gamma^\mu \frac{Y_R}{2} B_\mu \right) \psi_{\mathrm{e}R} = 0 \tag{10.48}$$

となる．ここに g と g' は $SU(2)$ と $U(1)_Y$ のゲージ結合定数である．ゲージ場として4種の実数場 W_μ^a $(a = 1, 2, 3), B_\mu$ が含まれているが，弱い相互作用を媒介する $W_\mu^\pm, Z_\mu^0$ および電磁場 A_μ は，それらの重ね合わせとして実現される．

$W^\pm$ は荷電粒子なのでそれらは複素場によって表される．

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2) \tag{10.49}$$

とおくと，

$$I_1 W_\mu^1 + I_2 W_\mu^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} \tag{10.50}$$

となり，(10.47) の中の $\mathrm{W}^\pm$ の相互作用の項が，(10.14),(10.15) で与えた相互作用項を正しく実現していることがわかる．$SU(2)$ の結合定数 g が $\mathrm{W}^\pm$ の結合定数になっている．

A_μ と Z_μ は残りの2つの場 W_μ^3, B_μ を混合角 θ_W で重ね合わせた

$$A_\mu = W_\mu^3 \sin\theta_W + B_\mu \cos\theta_W \tag{10.51}$$

$$Z_\mu = W_\mu^3 \cos\theta_W - B_\mu \sin\theta_W \tag{10.52}$$

で表される．θ_W は電磁場 A_μ が電荷 0 のニュートリノと相互作用をしないという条件から定まる．(10.47) のそれらの相互作用の項

$$gI_3W_\mu^3 + g'\frac{Y_L}{2}B_\mu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} gW_\mu^3 - g'B_\mu & 0 \\ 0 & -gW_\mu^3 - g'B_\mu \end{pmatrix} \tag{10.53}$$

の中で，1 行 1 列の成分は A_μ を含んではならない．これから

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{10.54}$$

と求まる．また 2 行 2 列の成分の A_μ の係数は電子の電磁相互作用の結合定数 $-e$ なので

$$e = g\sin\theta_W = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \tag{10.55}$$

となる．

$SU(2) \times U(1)_Y$ のゲージ相互作用すべてをまとめて書くと次のようになる．

$$\begin{aligned} & g\sum_{a=1}^{3} I_a W_\mu^a + g'\frac{Y}{2}B_\mu \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}}(I^+W_\mu^+ + I^-W_\mu^-) + \frac{g}{\cos\theta_W}(I_3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu + eQA_\mu \end{aligned} \tag{10.56}$$

ここに $I^\pm = I_1 \pm iI_2$，Q はそれがかかる波動関数の粒子の電荷の値である．右巻き状態の波動関数にかかるときには $I^+ = I^- = I_3 = 0$ である．これらの相互作用は 1,2,3 世代のレプトンすべてに共通である．θ_W はワインバーグの弱混合角と呼ばれ，実験的には

$$\sin^2\theta_W \cong 0.231 \tag{10.57}$$

の値が得られている．レプトンによる Z^0 の吸収・放出の素過程

$$\nu_L \leftrightarrow \nu_L + \mathrm{Z}^0\ ,\quad \mathrm{e}_L^- \leftrightarrow \mathrm{e}_L^- + \mathrm{Z}^0\ ,\quad \mathrm{e}_R^- \leftrightarrow \mathrm{e}_R^- + \mathrm{Z}^0 \tag{10.58}$$

は，(10.56) から結合定数が

$$g(\nu_L) = \frac{g}{\cos\theta_W}\frac{1}{2}\ ,\quad g(\mathrm{e}_L^-) = \frac{g}{\cos\theta_W}(-\frac{1}{2} + \sin^2\theta_W),$$

$$g(e_R^-) = \frac{g}{\cos\theta_W}\sin^2\theta_W \tag{10.59}$$

と求まる．

Z^0 の質量 m_Z および崩壊幅 Γ_Z の測定値は

$$m_Z = 91.19\ \mathrm{GeV}/c^2\ ,\quad \Gamma_Z = 2.50\ \mathrm{GeV} \tag{10.60}$$

である．またレプトン対への崩壊の分岐比 R_Z は

$$R_Z(e^-e^+) = 3.36\times10^{-2},\ R_Z(\mu^-\mu^+) = 3.37\times10^{-2},\ R_Z(\tau^-\tau^+) = 3.37\times10^{-2} \tag{10.61}$$

が得られており，Z^0 とレプトンとの相互作用においても世代間の結合定数の普遍性がよく成り立っている．

$Z^0 \to e^- + e^+$ の崩壊の部分幅は左右両カイラリティについて和をとった

$$\Gamma(e^-e^+) = \Gamma(e_L^-e_R^+) + \Gamma(e_R^-e_L^+) \tag{10.62}$$

$$= \frac{1}{24\pi}\left(g^2(e_L^-) + g^2(e_R^-)\right)\frac{m_Z c}{\hbar} \tag{10.63}$$

で与えられる．他方，ニュートリノへの崩壊 $Z^0 \to \nu_L + \bar{\nu}_R$ の部分幅は

$$\Gamma_Z(\nu_L\bar{\nu}_R) = \frac{1}{24\pi}g^2(\nu_L)\frac{m_Z c}{\hbar} \tag{10.64}$$

である．

これらの素過程により，Z^0 ボソンの交換は図 10.3 に示すニュートリノ ν_μ と電子 e^- の散乱などを起す．

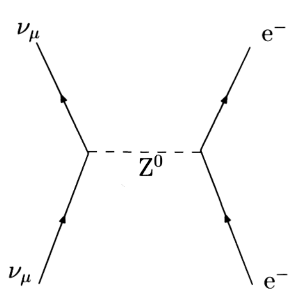


図 10.3 $\nu_\mu - e^-$ 散乱

表 10.1　$SU(2)\times U(1)_Y$ の量子数

	I	I_3	Y	$Q=I_3+Y/2$
ν_L	1/2	1/2	−1	0
e_L^-		−1/2		−1
e_R^-	0	0	−2	−1
u_L	1/2	1/2	1/3	2/3
d'_L		−1/2		−1/3
u_R	0	0	4/3	2/3
d'_R	0	0	−2/3	−1/3

これまでレプトンの相互作用について見てきたが，クォークの相互作用も同様である．それらも $SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ対称性によって定まっている．(10.36) の左巻きクォークは $SU(2)$ の弱アイソ 2 重項である．右巻きクォークはすべて弱アイソ 1 重項になっている．$U(1)_Y$ の弱ハイパーチャージ Y は (10.45) によってそれぞれの電荷 Q が実現されるように定まっている．クォークとレプトンの量子数をまとめると表 10.1 となる．$W_\mu^\pm, Z_\mu, A_\mu$ との相互作用はすべて (10.56) で決まる．クォークの運動方程式は質量を無視すると

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{1}{c}\gamma_\mu\left(\frac{g}{\sqrt{2}}(I^+W_\mu^+ + I^-W_\mu^-)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{g}{\cos\theta_W}(I_3-Q\sin^2\theta_W)Z_\mu+eQA_\mu\right)\right)\begin{pmatrix}\psi_{\mathrm{u}L}\\ \psi_{\mathrm{d}'L}\end{pmatrix}=0 \quad (10.65)$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{1}{c}\gamma_\mu\left(\frac{g}{\cos\theta_W}(-Q\sin^2\theta_W)Z_\mu+eQA_\mu\right)\right)\psi_{\mathrm{u}R}=0 \quad (10.66)$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu}-\frac{1}{c}\gamma_\mu\left(\frac{g}{\cos\theta_W}(-Q\sin^2\theta_W)Z_\mu+eQA_\mu\right)\right)\psi_{\mathrm{d}'R}=0 \quad (10.67)$$

で与えられる．$\mathrm{W}^\pm$ は左巻きの粒子とのみ相互作用をするが，Z^0 は左右両カイラリティの粒子と相互作用をする．Q に比例する項は $Q_L=Q_R$ だから左右対称であるが，I_3 の項は左巻き粒子だけに現れるので，全体として Z^0 の相互作用は左右非対称となり，空間反転対称性は満たされない．

クォークの弱アイソ 2 重項の構成において現れたキャビボ・小林・益川行列 (10.30) は，$W_\mu^\pm$ の相互作用において世代間の遷移を引き起こした．しかし Z_μ や A_μ の相互作用には効いてこない．たとえば Z^0 と d タイプクォークの相互

作用は

$$\mathrm{d}' \to \mathrm{d}' + \mathrm{Z}^0 \ , \ \mathrm{s}' \to \mathrm{s}' + \mathrm{Z}^0 \ , \ \mathrm{b}' \to \mathrm{b}' + \mathrm{Z}^0 \tag{10.68}$$

の 3 種の素過程がすべて等しい結合定数で起るため，ユニタリー変換の効果は，左右両辺の間でキャンセルしてしまい，プライムを取り除いた 3 種の素過程と等価になる．したがって Z^0 の相互作用はクォークやレプトンのフレーバーを変化させることはない．粒子の崩壊には関与せず，主に粒子の散乱においてしかその効果が現れない．陽子や電子の散乱では，強い相互作用や電磁相互作用が存在するため Z^0 の弱い相互作用のわずかな効果を見いだすのは大変むずかしい．最適な散乱は，弱い相互作用しかしないニュートリノをビームとした実験で，1970 年代になってようやくその力の存在が発見された．

自習問題

[1] (10.11) を確かめよ．

[2] τ^- の崩壊において $\tau^- \to \nu_\tau + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$ と $\tau^- \to \nu_\tau + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の起る確率，すなわち分岐比は $R(\nu_\tau \mathrm{e}^- \bar{\nu}_\mathrm{e}) = 0.1793$，$R(\nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu) = 0.1758$ である．それぞれの部分崩壊幅は τ^- の寿命 $\tau_\tau = 0.291 \times 10^{-12}$ sec から定まる全崩壊幅 $\Gamma_\tau = \hbar \tau_\tau^{-1}$ にこれらの分岐比をかけたもので与えられる．2.3 節で与えた μ^- および τ^- の質量と寿命により，(10.28) がよく満たされていることを確かめよ．

[3] W^+ がハドロンに崩壊する分岐比 $R_\mathrm{W}(\mathrm{hadrons})$ を，W^+ がクォークに崩壊するとし，強い相互作用の効果を無視して求めよ．また，その値を，1 からレプトンへの分岐比 $3R_\mathrm{W}(\mathrm{e}^+\nu_\mathrm{e})$ を引いた値と比較せよ．

[4] $\tau^- \to \nu_\tau + [\mathrm{hadrons}]$ の崩壊をクォークへの崩壊 $\tau^- \to \nu_\tau + \bar{\mathrm{u}} + \mathrm{d}$，$\nu_\tau + \bar{\mathrm{u}} + \mathrm{s}$ で近似し ($\bar{\mathrm{c}}\mathrm{d}, \bar{\mathrm{c}}\mathrm{s}$ は $\bar{\mathrm{c}}$ が重たいので寄与しない)，その分岐比 $R(\nu_\tau + \mathrm{hadrons})$ を求めよ．また，それを実測値 $1 - R(\nu_\tau \mathrm{e}^- \bar{\nu}_\mathrm{e}) - R(\nu_\tau \mu^- \bar{\nu}_\mu)$（問題 [2] 参照）と比較せよ．

[5] (10.54),(10.55),(10.56) を導け．

[6] Z^0 からハドロンへの崩壊 $\mathrm{Z}^0 \to [\mathrm{hadrons}]$ の分岐比 $R_\mathrm{Z}(\mathrm{hadrons})$ を，クォークへの崩壊 $\mathrm{Z}^0 \to \bar{\mathrm{u}}\mathrm{u}, \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d}, \bar{\mathrm{s}}\mathrm{s}, \bar{\mathrm{c}}\mathrm{c}, \bar{\mathrm{b}}\mathrm{b}$ で近似して求めよ．また，その結果を観測値 $R_\mathrm{Z}(\mathrm{hadrons}) = 0.699$ と比較せよ．

[7] Z^0 のニュートリノへの崩壊は，ニュートリノの相互作用が弱いため測定することはできない．しかしそれは Z^0 の崩壊幅には寄与しているはずだから $R_\mathrm{Z}(\nu\bar{\nu}) = 1 - R_\mathrm{Z}(\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+) - R_\mathrm{Z}(\mu^-\mu^+) - R_\mathrm{Z}(\tau^-\tau^+) - R_\mathrm{Z}(\mathrm{hadrons})$ がニュートリノへの分岐比となる．実際にニュートリノの分岐比を求めることにより，ニュートリノが 4 世代以上存在すると，観測結果と矛盾することを確かめよ．

コラム：$\pi^{\pm}$ メソン崩壊の不思議

スピンが0の荷電パイメソン π^- のレプトンへの崩壊 $\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$，$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の崩壊幅の比の実測値は $\Gamma(\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e)/\Gamma(\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu) = 1.22 \times 10^{-4}$ である．素朴に考えると，質量の軽い e^- を放出するほうが，e^- より200倍も重たい μ^- を放出するよりずっと楽なはずなのに，実験結果は，π^- が e^- を放出して崩壊する分岐比は上記のように極めて小さくなっている．

ここでその謎解きをしよう．π^- の重心系で考察する．この崩壊は中間状態に仮想粒子状態の W^- を経由して起るので，(10.19) により終状態のレプトンのカイラリティは $e_L^- + \bar{\nu}_{eR}$ および $\mu_L^- + \bar{\nu}_{\mu R}$ である．0質量である反ニュートリノ $\bar{\nu}_R$ のヘリシティは $\lambda = +1/2$ である．反ニュートリノと反対方向に走る e^- や μ^- のヘリシティは角運動量の保存則により $\lambda = +1/2$ でなければならない．$\pi^- \to e^- + \bar{\nu}_e$ の崩壊において e^- の質量を $m_e = 0$ と近似すると，e_L^- のヘリシティは $\lambda = -1/2$ となるので，この崩壊は禁止される．第1章の問題[5]で求めた正エネルギー ($E > 0$) のヘリシティ $\lambda = +1/2$ の固有状態 (1.65) はヘリシティの表式 (10.20) を用いると，$\gamma^5 \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{p}}{|\vec{p}|} u_{E+1/2} = +u_{E+1/2}$ であるが，$(\vec{\alpha}\cdot\vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ なので，両辺に $\vec{\alpha}\cdot\vec{p}$ をかけてディラック方程式 $(c\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + mc^2\beta)u_{E+1/2} = Eu_{E+1/2}$ を用いると，$\gamma^5 u_{E+1/2} = \frac{E - mc^2\beta}{c|\vec{p}|} u_{E+1/2}$ と表される．これにより，$E \gg mc^2$ の近似のもとで

$$Ru_{E+1/2} \simeq u_{E+1/2}\,, \quad Lu_{E+1/2} \simeq \frac{mc^2}{2E}\gamma^0 u_{E+1/2}$$

が成り立つ．終状態の e^- のエネルギーは $E \simeq m_\pi c^2/2$ である．すなわち，角運動量の保存則によって求められるヘリシティ $\lambda = +1/2$ の状態の大部分は右巻きカイラリティであり，W^- と相互作用できる左巻きカイラリティの成分はわずか m_e/m_π の比率でしか含まれていない．そのため崩壊振幅に m_e/m_π の因子がかかり，崩壊幅は $(m_e/m_\pi)^2$ で抑制されるのである．$\pi^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ の崩壊においては $m_\pi \simeq m_\mu$ だからこのような抑制因子は現れない．このため，上記の崩壊幅の比が実現され，π^- が電子を放出して崩壊する分岐比は極めて小さくなっているのである．

K^- の崩壊 $K^- \to e^- + \bar{\nu}_e$, $K^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ も同様である．この場合は m_e だけでなく m_μ も m_K よりかなり小さいので，崩壊振幅はそれぞれ m_e/m_K, m_μ/m_K の因子を含み，崩壊幅の比は $\Gamma(K^- \to e^- + \bar{\nu}_e)/\Gamma(K^- \to \mu^- + \bar{\nu}_\mu) \simeq (m_e/m_\mu)^2 (= 2.33 \times 10^{-5})$ となる．実測値は 2.44×10^{-5} である．

CHAPTER 11

終　章

自然界の基本構成子であるクォークやレプトンは，大変軽いニュートリノから大変重たいトップクォークまで，様々な値の固有の質量をもっている．また，弱い相互作用を媒介するWやZボソンも大きな質量をもっている．これらの質量は，元来，それぞれの粒子に備わっているものではなく，ある力学的な機構を通して生み出されたものである．この章でその機構を概観することにより，本書の締めくくりとする．

11.1 ゲージ対称性の自発的破れ

第10章で弱い相互作用と電磁相互作用が，$SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ理論として実現されていることを見たが，しかしそこでは，はなはだ不可解なことを未解決のまま残してきた．

そもそも $SU(2)$ のゲージ対称性は，ν_L と e_L^- あるいは u_L と d_L 等の波動関数を，時空の各点において随意に変換しても自然法則は変わらないと主張している．すなわち ν_L と e_L^- を絶対的に識別することは原理的に不可能であるといっているのである．量子色力学における $SU(3)$ のゲージ対称性は，クォークの色の状態を決定することは原理的に不可能だと主張しているが，クォークはハドロンの中に閉じ込められていて全体で無色の状態でしか存在し得ないから，この主張は納得できる．しかし，$SU(2)$ の主張は，明らかに経験に反している．ニュートリノと電子は電荷も質量も異なっており，明確に識別できる．

また光子はグルーオンと同様に質量は0であるが，WとZは核子の100倍ほどの大きな質量をもっている．これらの違いはどのような事情によって生じているのであろうか．それらは以下で見る真空がもつある力学的特性に起因する．

自然界には，これまでに登場してきたクォーク，レプトンおよびゲージ場に加え，実験的には未確認であるが理論的に不可欠な要素としてもう1つ，ヒッグス・スカラー場 $\phi(x)$ が存在している．これはスピンは0であり，弱アイソスピンが $I = 1/2$ のアイソ2重項で弱ハイパーチャージは $Y = 1$ をもっている．

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

私たちの住んでいるこの4次元時空の真空は全く何もない状態ではなく，ϕ に作用するある力学の結果, それが $\phi(x) \neq 0$ の真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ をもった状態として実現されている．この真空期待値は時空の各点 x ごとに，$SU(2) \times U(1)_Y$ が作用する「空間」の中に特別な「方向」を与える．その結果，この「方向」に対する相対的な「角度」がゲージ変換に対して不変な観測可能量として存在することになる．電子とニュートリノが識別できているのは，それぞれが $\langle\phi(x)\rangle$ となす「角度」が異なっているからである．

真空期待値 $\langle\phi(x)\rangle$ は $SU(2) \times U(1)_Y$ の座標系のゲージ変換によって

$$\langle\phi(x)\rangle \longrightarrow \langle\phi'(x)\rangle = e^{i\Lambda_Y(x)\frac{Y}{2}} e^{i\sum_{a=1}^{3}\Lambda_a(x)I_a} \langle\phi(x)\rangle \tag{11.2}$$

と変化する．真空はこのゲージ変換に対して不変でない．このような真空の状況は，ゲージ対称性の自発的破れと呼ばれる．ゲージ変換のもとで不変な $\langle\phi^\dagger(x)\phi(x)\rangle$ は真空の並進対称性のため，時空点 x によらない定数である．

$SU(2) \times U(1)_Y$ の座標系を上手にとると，$\phi(x)$ の真空期待値が ϕ^0 成分だけに0でない実数値 v をもつ

$$\langle\phi(x)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

の形にすることができる．この特別な座標系でクォークやレプトンを表したのが (10.36) であり，そこではすべての粒子の電荷は (10.45) で与えられる．

$SU(2) \times U(1)_Y$ のゲージ対称性は真空期待値 (11.3) によって自発的対称性の破れを起しているが，ゲージ変換 (11.2) の中で $\Lambda_3(x) = \Lambda_Y(x) \equiv \Lambda(x), \Lambda_1(x) = \Lambda_2(x) = 0$ とおいた位相変換の自由度は，$I_3 + Y/2 = Q$ なので (11.3) を不変に保っており，自発的破れを起さずに生き残っている．これが電磁相互作用の $U(1)_Q$ ゲージ変換 (6.13) である．

ゲージ対称性はゲージ場のあり方に強い制限を与えており，その対称性が自発的に破れない限り対応するゲージ場は0質量となる．したがって光子とグルーオンは0質量である．自発的破れが起った場合には，その破れの大きさ v に比例してゲージ場は質量を得る．その結果WとZは大きな質量をもっている．

11.2 ヒッグス粒子と南部・ゴールドストーンの定理

$\phi(x)$ はスカラー場だから，相互作用がなければ，クライン・ゴルドン方程式 (1.34) を満たす．$SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ相互作用は座標微分を共変微分

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{i}{c\hbar} X_\mu \ , \quad X_\mu \equiv g\sum_{a=1}^{3} I_a W_\mu^a + g'\frac{Y}{2}B_\mu \tag{11.4}$$

に置き換えることによって定まる．ここに，$\frac{Y}{2}$ には2行2列の単位行列が含まれているものとする．自己相互作用を含めると，$\phi(x)$ は運動方程式

$$D^\mu D_\mu \phi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi + \frac{\lambda}{c^2\hbar^2}(\phi^\dagger\phi)\phi = 0 \tag{11.5}$$

に従う．相互作用の結合定数 λ は，最低エネルギー状態として真空が安定に存在するという要請により，正の実数でなければならない（付録 A.3 参照）．この方程式が真空期待値 (11.3) で表された真空において成り立つためには

$$m^2c^4 = -\lambda\langle\phi^\dagger\phi\rangle = -\lambda v^2 \tag{11.6}$$

が満たされていなければならない．ゲージ対称性の自発的破れは，ヒッグス・スカラー場の質量項が負 ($m^2 < 0$) のときに起る．これは一見深刻な事態に思えるが，これから見るようにそれは何らの困難も生じない．

真空期待値 (11.3) のまわりの場の運動を詳しく見よう．

$$\phi(x) = \langle\phi\rangle + \varphi(x) \ , \quad \varphi(x) \equiv \begin{pmatrix} \varphi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(h^0(x) + i\varphi^0(x)) \end{pmatrix}, \quad \langle\phi\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{11.7}$$

とおく．$\varphi^+(x)$ は複素場であるが $h^0(x), \varphi^0(x)$ は実数場としている．(11.5) の中の場の2次以上の項は相互作用を表しているので，それらを落として場の1

次の項を抜き出すと

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi + \frac{i}{c\hbar} \partial_\mu X^\mu \langle\phi\rangle + \frac{\lambda}{c^2\hbar^2} \left(\langle\phi\rangle^\dagger \varphi + \varphi^\dagger \langle\phi\rangle \right) \langle\phi\rangle = 0 \ , \quad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{11.8}$$

となる．(10.56) により

$$X_\mu = \frac{g}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & W_\mu^+ \\ W_\mu^- & 0 \end{pmatrix} + \frac{g}{\cos\theta_W} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sin^2\theta_W & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} Z_\mu + e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A_\mu \tag{11.9}$$

だから

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^+ + i \frac{gv}{\sqrt{2}c\hbar} \partial^\mu W_\mu^+ = 0 \tag{11.10}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^0 - \frac{gv}{\sqrt{2}c\hbar\cos\theta_W} \partial^\mu Z_\mu = 0 \tag{11.11}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu h^0 + \frac{2\lambda}{c^2\hbar^2} v^2 h^0 = 0 \tag{11.12}$$

が得られる．

(11.12) の実スカラー場 $h^0(x)$ はクライン・ゴルドン方程式に従う，質量が

$$m_{\rm h} = \frac{\sqrt{2\lambda}}{c^2} v \tag{11.13}$$

の粒子 h^0 を表している．それはヒッグス粒子と呼ばれているが，実験的にはまだ発見されていない．2011 年現在，その質量の下限として

$$m_{\rm h} > 114.4 \ \mathrm{GeV/c^2} \tag{11.14}$$

が得られている．ヒッグス粒子の発見は高エネルギー物理学実験の最大の課題である．ジュネーヴの欧州原子核研究所 (CERN) に建設が進められてきた大型加速器 LHC (Large Hadron Collider) が 2010 年より本格的に稼働を開始しており，今後数年の内には h^0 は発見されるであろうと予測されている．

$\varphi^+(x), \varphi^0(x)$ の運動方程式 (11.10), (11.11) に視点を移そう．これらは幾分難解な形をしている．これらの方程式に取り組む前に，仮想的にゲージ結合定数が $g = g' = 0$ の世界を考察しておくのは大変有益である．ゲージ相互作用がなければゲージ変換 (11.2) にもとづく $SU(2) \times U(1)_Y$ のゲージ対称性は存在しなくなる．各時空点 x^μ で場の位相を随意に変換することはゆるされない．

しかし，ゲージ変換関数 $\Lambda_a(x), \Lambda_Y(x)$ を時空点 x^μ に依存しない定数とするグローバル変換はまだゆるされており，それらの変換のもとですべての運動方程式は対称である．このグローバルな $SU(2) \times U(1)_Y$ の対称性もヒッグス・スカラー場の真空期待値 (11.3) によって自発的破れを起している．(11.10), (11.11) でゲージ結合定数を 0 にすると，これらの式は φ^+, φ^0 が質量 $m = 0$ の粒子となることを示している．グローバル対称性が自発的に破れると，破れた対称性の変換の自由度の数 $(4 - 1 = 3)$ だけ 0 質量のスカラー粒子 $(\varphi^+, \varphi^-, \varphi^0)$ が現れるのである．この現象は南部・ゴールドストーンの定理と呼ばれ，それらの 0 質量のスカラー粒子は南部・ゴールドストーン・ボソンと呼ばれる．

ゲージ相互作用があると，φ^+, φ^0 はゲージ場との間で遷移を起す．これらの方程式は，質量 m のディラック方程式のカイラリティ分解 (10.8) とよく似ている．ψ_L と ψ_R は $m = 0$ のときには全く独立な自由度で，それらにゆるされるヘリシティ状態は ψ_L は $\lambda = -1/2$，ψ_R は $\lambda = +1/2$ のみであった．それらが質量項によって互いに結び付くことによって，スピン $s = 1/2$ の粒子の 2 つのヘリシティ状態 $\lambda = \pm 1/2$ が実現されていた．付録の A.4 で示しているように，光子はスピン $s = 1$ であるが，ゆるされるヘリシティ状態は横波の $\lambda = \pm 1$ のみであり，$\lambda = 0$ の縦波状態は存在しない．W や Z もゲージ対称性が破れていなかったら光子と同じく 0 質量であり，それらのヘリシティも $\lambda = \pm 1$ のみである．ゲージ対称性が破れて $v \neq 0$ となったとき，(11.10), (11.11) はヘリシティ $\lambda = 0$ のみをもつスカラー粒子 φ^+, φ^0 と，ヘリシティ $\lambda = \pm 1$ しかゆるされなかった W, Z を結び付けている．これにより W, Z は 3 つのヘリシティ状態 $\lambda = \pm 1, 0$ のすべてをもつことができるようになるのではないかと予測される．すなわち，0 質量だったゲージ場は，対称性の自発的破れによって現れた 0 質量の南部・ゴールドストーン・ボソンを，ゲージ相互作用を通して自らの中に取り込むことにより，3 つのヘリシティ状態を備えた有限の質量をもったスピン $s = 1$ の粒子として振る舞うようになる．これに伴い，南部・ゴールドストーン・ボソンがもっていたそれ独自の粒子としての自由度は消え去る．これはヒッグス現象と呼ばれる．

11.3 $\mathrm{W}^{\pm}, \mathrm{Z}^0$ の質量

W, Z の質量を求めるには，もともとの $SU(2) \times U(1)_Y$ のゲージ対称性にもとづいた $W^a_\mu (a = 1, 2, 3), B_\mu$ の運動方程式を解析するのが正統的であるが，それは多少煩雑である．それらの運動方程式は次節で与えることにして，ここでは直観的な考察にもとづいて W, Z の質量を求めよう．

W^+_μ や Z_μ は相互作用が全くなければ真空中の電磁場のマックスウェル方程式 $\partial_\nu \partial^\nu A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0$ と同じ形の方程式に従う．ゲージ対称性が自発的に破れることによって φ^+, φ^0 の運動方程式 (11.10), (11.11) の中に W^+_μ, Z_μ との遷移が現れるのだから，W^+_μ, Z_μ の運動方程式の中にも同じ強さでその遷移は現れるはずである．ギリシャ添字がバランスするように可能な運動方程式の形を書き下すと，場について 1 次の項は，W^+_μ については

$$\partial_\nu \partial^\nu W^+_\mu - \partial_\mu \partial^\nu W^+_\nu + \frac{m^2_{\mathrm{W}} c^2}{\hbar^2} W^+_\mu - i \frac{gv}{\sqrt{2} c\hbar} \partial_\mu \varphi^+ = 0 \tag{11.15}$$

の形でなければならない．(6.28) と同様の計算により

$$\left(\partial^\rho \partial_\rho + \frac{m^2_{\mathrm{W}} c^2}{\hbar^2} \right) (\partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu) = 0 \tag{11.16}$$

が成り立つので m_{W} は W の質量を表している．(11.15) の遷移を表す最後の項には，一般には φ^+ の場のスケールをどうとるかに依存する定数係数 K_ϕ が現れるが，ここではそれらのスケールをゲージ場のスケールと同じにとることにより $K_\phi = 1$ とおいている．この項の符合がマイナスであることは今の考察からはいえないが，最後の結果を見るとそれが不可欠であることが理解できる．

(11.15) に ∂^μ を作用させると，第 1 項と第 2 項がキャンセルして

$$\frac{m^2_{\mathrm{W}} c^2}{\hbar^2} \partial^\mu W^+_\mu - i \frac{gv}{\sqrt{2} c\hbar} \partial^\mu \partial_\mu \varphi^+ = 0 \tag{11.17}$$

が得られる．この式をもともとの φ^+ の運動方程式 (11.10) と比較すると，両者にはともに同じ場の量 $\partial^\mu W^+_\mu$，$\partial^\mu \partial_\mu \varphi^+$ が現れている．これらの方程式が互いに矛盾しないためには，m_{W} は

$$m_{\mathrm{W}} = \frac{gv}{\sqrt{2} c^2}\,, \tag{11.18}$$

でなければならない．(11.15) の最後の項の符合が逆だったら W はいわゆる「タキオン」と呼ばれる $m_{\mathrm{W}}^2 < 0$ の粒子になってしまい困難におちいる．

Z についても全く同様であり，その運動方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu Z_\mu - \partial_\mu \partial^\nu Z_\nu + \frac{m_{\mathrm{Z}}^2 c^2}{\hbar^2} Z_\mu - \frac{gv}{\sqrt{2} c\hbar \cos\theta_W} \partial_\mu \varphi^0 = 0 \tag{11.19}$$

により，Z も質量

$$m_{\mathrm{Z}} = \frac{gv}{\sqrt{2} c^2 \cos\theta_W} \tag{11.20}$$

をもっていなければならない．

W と Z の質量 (11.18),(11.20) から，関係式

$$m_{\mathrm{W}} = m_{\mathrm{Z}} \cos\theta_W \tag{11.21}$$

が導かれるが，これはそれぞれの測定値 (10.21), (10.60), (10.57) によって大変よく成り立っている．

ゲージ対称性の観点から考察をもう少し深めよう．対称性の自発的破れが起っていない場合は $\langle \phi^\dagger(x)\phi(x) \rangle = 0$ は $\langle \phi(x) \rangle = 0$ を意味しており，真空は一意的に定まる．しかし，対称性が自発的に破れたときには真空は一意的には定まらない．$\langle \phi^\dagger(x)\phi(x) \rangle = v^2$ を満たす無数の真空が可能である．$\varphi^+(x), \varphi^0(x)$ はその無数の真空の可能性を記述している．しかし，それらの配位は $SU(2) \times U(1)_Y$ の座標軸を (11.2) に従って時空の各点ごとに上手にとることによって，つねに

$$\varphi^+(x) = 0\ , \quad \varphi^0(x) = 0 \tag{11.22}$$

におくことができる．すなわち，$\varphi^+(x), \varphi^0(x)$ は場の力学的自由度を失ってしまっている．このような $SU(2) \times U(1)_Y$ の座標系はユニタリーゲージと呼ばれる．11.1 節で見たように，このゲージで残っているゲージ変換の自由度は電荷 $Q = I_3 + Y/2$ の $U(1)_Q$ だけである．$W_\mu^\pm, Z_\mu$ に付随した破れたゲージ対称性のゲージ変換は凍結されてしまう．それとともに，(11.10), (11.11) はそれらに条件式

$$\partial^\mu W_\mu^\pm = 0\ , \quad \partial^\mu Z_\mu = 0 \tag{11.23}$$

を課すことになる．したがって，ユニタリーゲージでは W と Z の運動方程式 (11.15), (11.19) はクライン・ゴルドン方程式となり，W_μ^+, Z_μ の自由運動は

$$\partial_\nu \partial^\nu W_\mu^\pm + \frac{m_{\rm W}^2 c^2}{\hbar^2} W_\mu^\pm = 0 \tag{11.24}$$

$$\partial_\nu \partial^\nu Z_\mu + \frac{m_{\rm Z}^2 c^2}{\hbar^2} Z_\mu = 0 \tag{11.25}$$

で表される．ゲージ場が0質量であった背景には，それらの運動方程式のゲージ対称性があった．ゲージ変換が自発的対称性の破れによって凍結されることにより，それらの質量が0に保たれる保証がなくなったのである．

11.4 ゲージ場 W_μ^a, B_μ の運動方程式

この本の完備性を保つために，$SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ場 $W_\mu^a(a=1,2,3), B_\mu$ の運動方程式をここで与えておく．

B_μ は $U(1)_Y$ のゲージ場だから，ヒッグス・スカラーがなければ，その運動方程式は $U(1)_Q$ の電磁場のマックスウェル方程式 (6.26) の eQ を $g'\frac{Y}{2}$ で置き換えれば求まる．ヒッグス・スカラー場のカレント j_Y^ν も加えると

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} B^{\mu\nu} = g' \sum_{\rm n=l,q} \bar{\psi}_{\rm n} \gamma^\nu \frac{Y}{2} \psi_{\rm n} + \frac{1}{c} j_Y^\nu \tag{11.26}$$

である．n の和はすべてのレプトンとクォークの左右両カイラリティ ψ_L, ψ_R についてとる．W_μ^a の運動方程式はグルーオンの運動方程式 (7.25) を $SU(2)$ に書き換えればよいので

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} W^{a\mu\nu} - \frac{g}{\hbar c} \epsilon^{abc} W_\mu^b W^{c\mu\nu} = g \sum_{\rm n=l,q} \bar{\psi}_{\rm n} \gamma^\nu I_a \psi_{\rm n} + \frac{1}{c} j^{a\nu} \tag{11.27}$$

である．n の和は ψ_L のみである．

ヒッグス・スカラー場 ϕ のカレント $j_Y^\mu, j^{a\mu}$ は以下の考察によって求めることができる．スカラー場の量子系も非相対論の極限では通常の量子力学に移行する．エネルギーが

$$E = \int d^3\vec{x} \psi^\dagger (-\frac{\hbar^2}{2} \vec{\nabla}^2) \psi \tag{11.28}$$

の粒子の確率の流れの密度は

$$\vec{j}_P = \frac{\hbar}{2i} \left(\psi^\dagger \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla}\psi)^\dagger \psi \right) \tag{11.29}$$

であった．$\vec{j}_P$ に粒子の電荷 eQ をかけたものは電流密度 $\vec{j}_Q$ である．座標微分を共変微分に置き換えると

$$\frac{1}{c}\vec{j}_Q = \frac{1}{ic\hbar}\left(\phi^\dagger eQ\vec{D}\phi - (\vec{D}\phi)^\dagger eQ\phi\right) \tag{11.30}$$

となる．ここに $\phi \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\psi$ は，場の量子論の慣例に従って，非相対論のエネルギー (11.28) が $E = \int d^3\vec{x}\phi^\dagger(-\vec{\nabla}^2)\phi$ と表されるように規格化し直したもので，前節の (11.15) で $K_\phi = 1$ ととったことに対応している．座標微分が下付き添字の 4 元ベクトル ∂_μ であること，および $j_{Q\mu} = (j_Q^0, -\vec{j}_Q)$ に注意すると

$$\frac{1}{c}j_{Q\mu} = -\frac{1}{ic\hbar}\left(\phi^\dagger eQD_\mu\phi - (D_\mu\phi)^\dagger eQ\phi\right) \tag{11.31}$$

が求まる．

$SU(2)$ と $U(1)_Y$ のカレント $j^a{}_\mu, j_{Y\mu}$ は，(11.31) の eQ を gI_a と $g'\frac{Y}{2}$ に置き換えればよい．したがって

$$\frac{1}{c}j^a{}_\mu = -\frac{1}{ic\hbar}\left(\phi^\dagger gI_aD_\mu\phi - (D_\mu\phi)^\dagger gI_a\phi\right) \tag{11.32}$$

$$\frac{1}{c}j_{Y\mu} = -\frac{1}{ic\hbar}\left(\phi^\dagger g'\frac{Y}{2}D_\mu\phi - (D_\mu\phi)^\dagger g'\frac{Y}{2}\phi\right) \tag{11.33}$$

である（自習問題 [1] 参照）．

W^a_μ, B_μ の運動方程式 (11.27),(11.26) から，ϕ の真空期待値のもとで，場について 1 次の項を抜き出すと，多少の計算の後に W と Z の方程式 (11.15),(11.19) が求まる．電磁相互作用のゲージ対称性 $U(1)_Q$ は破れずに保たれているので，電磁場 A_μ の方程式はマックスウェル方程式のままで

$$\partial_\nu\partial^\nu A_\mu - \partial_\mu\partial^\nu A_\nu = 0 \tag{11.34}$$

となる．

11.5　クォークやレプトンの質量

ヒッグス・スカラー場の真空期待値によるゲージ対称性の自発的破れは，W と Z に質量をもたらすが，それのみならず，クォークやレプトンの質量もこの自発的破れを通して生じている．

10.1 節で見たように，クォークやレプトンの質量項は運動方程式の中で，カイラリティの左巻き状態 ψ_L と右巻き状態 ψ_R を結び付けている．しかし，$SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ対称性のもとで，ψ_L は $SU(2)$ の 2 重項，ψ_R は 1 重項として異なる変換を受けるので，運動方程式がゲージ対称性と矛盾せずに質量項を備えることはできない．クォークやレプトンの質量は $SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ対称性によって禁止されている．それにも関わらずそれらが質量をもっているのは，W や Z の場合と同様，ゲージ対称性の自発的破れによっている．

クォークやレプトンはゲージ場と相互作用しているが，それのみならず，ヒッグス・スカラー場 ϕ とも相互作用している．たとえば第 1 世代のレプトン

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix} \psi_{\nu L} \\ \psi_{\mathrm{e}L} \end{pmatrix}, \ \psi_R \equiv \psi_{\mathrm{e}R} \tag{11.35}$$

について ϕ との相互作用を考えてみよう．その結合定数を y_{e} とし，ゲージ場との相互作用の項を省略すると，運動方程式はゲージ対称性から，次の形に定まる．

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_L - \frac{y_{\mathrm{e}}^*}{c}\phi\psi_R = 0 \tag{11.36}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_R - \frac{y_{\mathrm{e}}}{c}\phi^\dagger\psi_L = 0 \tag{11.37}$$

(11.36) 式の左辺は 2 つの項がともにアイソ 2 重項になっており，また Y の値も第 1 項は $Y=-1$，第 2 項も $Y=1-2=-1$ で等しい．(11.37) 式の $\phi^\dagger\psi_L$ は $SU(2)$ のユニタリー変換に対して不変な積だから，両項ともにアイソ 1 重項で，また Y の値も第 2 項は $Y=-1-1=-2$ で第 1 項の値に一致している．したがってこの相互作用は $SU(2)\times U(1)_Y$ のゲージ対称性と矛盾することなしに存在がゆるされる．

(11.36) の中で結合定数が y_{e} の複素共役になるのは，ハミルトニアンのエルミート性にもとづいている．ψ_L, ψ_R をひとまとめに縦に並べて $\psi=(\psi_L,\psi_R)^T$ とおいて，ψ についての運動方程式を $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ と書いたとき，ハミルトニアン H はエルミートでなければならない．場の量子論の言葉でいうと，(11.36) は ψ_R から ψ_L に遷移する確率振幅が y_{e}^*，(11.37) は ψ_L から ψ_R への振幅が y_{e} であることを示しているが，これらは互いに複素共役の関係になければならない．任意の状態 $|\mathrm{a}\rangle$ と $|\mathrm{b}\rangle$ の間のハミルトニアンの行列要素は量子力学の基本的枠組みとして $\langle \mathrm{a}|\mathcal{H}|\mathrm{b}\rangle = \langle \mathrm{b}|\mathcal{H}|\mathrm{a}\rangle^*$ を満たす．

スピン0のスカラー場とスピン1/2の粒子との相互作用はπメソンと核子との相互作用の名前に因んで，一般に湯川相互作用と呼ばれる．

結合定数$y_{\rm e}$の位相の自由度は(11.36), (11.37)の中では本質的な意味はもたない．その位相をψ_Rに含めたものを改めてψ_Rと定義することにより，常に$y_{\rm e}$を実数にとることがゆるされる．

ϕの真空期待値によってゲージ対称性が自発的に破れているとき，その真空の中での電子やニュートリノの自由運動は，(11.36), (11.37)でϕをその真空期待値(11.3)で置き換えた

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{\nu L} = 0 \tag{11.38}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{{\rm e}L} - \frac{y_{\rm e}}{c}v\psi_{{\rm e}R} = 0 \tag{11.39}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi_{{\rm e}R} - \frac{y_{\rm e}}{c}v\psi_{{\rm e}L} = 0 \tag{11.40}$$

に従う．(11.39), (11.40)は電子が質量

$$m_{\rm e} = \frac{v}{c^2}y_{\rm e} \tag{11.41}$$

を得たことを表している．ニュートリノは(11.38)により0質量のままである．e, μ, τの質量が異なるのは，それらがヒッグス・スカラー場と相互作用する湯川結合定数y_e, y_μ, y_τが異なっていることによる．

クォークの質量も同様の機構によって生じているが，少し複雑なことがある．ゲージ相互作用の部分を省略して，$SU(2)\times U(1)_Y$対称性でゆるされる湯川相互作用をすべて含んだ運動方程式を注意深く書き下すと

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^i_L - \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}(y^\dagger_{\rm u})^{ij}\tilde{\phi}\psi^j_{{\rm u}'R} - \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}(y^\dagger_d)^{ij}\phi\psi^j_{{\rm d}'R} = 0 \tag{11.42}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^i_{{\rm u}'R} - \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}(y_u)^{ij}\tilde{\phi}^\dagger\psi^j_L = 0 \tag{11.43}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^i_{{\rm d}'R} - \frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}(y_d)^{ij}\phi^\dagger\psi^j_L = 0 \tag{11.44}$$

となる．ここに

$$\psi^i_L = \begin{pmatrix}\psi^i_{{\rm u}'L}\\ \psi^i_{{\rm d}'L}\end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi} = \begin{pmatrix}\phi^{0*}\\ -\phi^-\end{pmatrix} \tag{11.45}$$

で，$\tilde{\phi}$ は，強い相互作用のアイソスピンにおいて反クォークのアイソスピン変換性を (9.16) で定めたのと同様に，$SU(2)$ のもとで弱アイソ 2 重項として正しく変換するように ϕ の荷電共役場に手を加えた，弱ハイパーチャージが $Y=-1$ のスカラー場である．i,j は世代 1,2,3 を区別しているが，プライムがつけてあるのは，それらがアイソ 2 重項や 1 重項の中にゲージ群の表現の成分として現れるものであり，クォーク・フレーバーすなわち質量の固有状態ではないことを表している．湯川結合定数は世代について 3 行 3 列の行列として $y_{\rm u}, y_{\rm d}$ およびそれらのエルミート共役 $y_{\rm u}^{\dagger}, y_{\rm d}^{\dagger}$ が現れる．エルミート共役が現れるのはレプトンの湯川相互作用 (11.36), (11.37) のところで説明したハミルトニアンのエルミート性による．

(11.42), (11.43), (11.44) の ϕ および $\tilde{\phi}$ をその真空期待値で置き換え，場について 1 次の項のみを残すと

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{{\rm u}'L}^{i}-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}v(y_{\rm u}^{\dagger})^{ij}\psi_{{\rm u}'R}^{j}=0 \tag{11.46}$$

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{{\rm d}'L}^{i}-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}v(y_{d}^{\dagger})^{ij}\psi_{{\rm d}'R}^{j}=0 \tag{11.47}$$

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{{\rm u}'R}^{i}-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}v(y_{u})^{ij}\psi_{{\rm u}'L}^{j}=0 \tag{11.48}$$

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{{\rm d}'R}^{i}-\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{3}v(y_{d})^{ij}\psi_{d'L}^{j}=0 \tag{11.49}$$

となる．クォークの質量はレプトンの場合とは異なって，世代についての行列になっている．u タイプクォークと d タイプクォークの質量行列を

$$(M_{\rm u})^{ij}=\frac{v}{c^{2}}(y_{\rm u})^{ij}\ ,\quad (M_{\rm d})^{ij}=\frac{v}{c^{2}}(y_{\rm d})^{ij} \tag{11.50}$$

で定義しよう．クォーク・フレーバーは質量の固有状態のクォークに付与される量子数だから，その固有状態を求めるには，これらの質量行列を対角化しなければならない．行列 $M_{\rm u}, M_{\rm d}$ は一般にはエルミート行列ではないので，普通のユニタリー変換で対角化することはできない．

任意の正方行列 M は 2 個のユニタリー行列 V_L, V_R を用いて双ユニタリー変換 $V_R M V_L^{-1}$ をすることにより，必ず実対角行列にすることができる（自習問

題 [4] 参照）．$M_\mathrm{u}, M_\mathrm{d}$ を実対角行列にする 3 行 3 列の双ユニタリー変換を

$$V_{\mathrm{u}R} M_\mathrm{u} V_{\mathrm{u}L}^{-1} = M_\mathrm{u}^\mathrm{diag} = \begin{pmatrix} m_\mathrm{u} & 0 & \\ 0 & m_\mathrm{c} & 0 \\ 0 & 0 & m_\mathrm{t} \end{pmatrix} ,$$

$$V_{\mathrm{d}R} M_\mathrm{d} V_{\mathrm{d}L}^{-1} = M_\mathrm{d}^\mathrm{diag} = \begin{pmatrix} m_\mathrm{d} & 0 & \\ 0 & m_\mathrm{s} & 0 \\ 0 & 0 & m_\mathrm{b} \end{pmatrix} \tag{11.51}$$

としよう．$m_\mathrm{u}, m_\mathrm{c}, m_\mathrm{t}, m_\mathrm{d}, m_\mathrm{s}, m_\mathrm{b}$ は正の実数とする．これらを逆変換することにより

$$\frac{v}{c} y_\mathrm{u} = V_{\mathrm{u}R}^{-1} c M_\mathrm{u}^\mathrm{diag} V_{\mathrm{u}L} \ , \quad \frac{v}{c} y_\mathrm{d} = V_{\mathrm{d}R}^{-1} c M_\mathrm{d}^\mathrm{diag} V_{\mathrm{d}L} \tag{11.52}$$

$$\frac{v}{c} y_\mathrm{u}^\dagger = V_{\mathrm{u}L}^{-1} c M_\mathrm{u}^\mathrm{diag} V_{\mathrm{u}R} \ , \quad \frac{v}{c} y_\mathrm{d}^\dagger = V_{\mathrm{d}L}^{-1} c M_\mathrm{d}^\mathrm{diag} V_{\mathrm{d}R} \tag{11.53}$$

が求まる．(11.46),(11.47),(11.48),(11.49) の各式を $i = 1, 2, 3$ の 3 成分の縦ベクトルとし，左からそれぞれ $V_{\mathrm{u}L}, V_{\mathrm{d}L}, V_{\mathrm{u}R}, V_{\mathrm{d}R}$ をかけることにより

$$\psi_{\mathrm{u}L} = V_{\mathrm{u}L} \psi_{\mathrm{u}'L} \ , \quad \psi_{\mathrm{d}L} = V_{\mathrm{d}L} \psi_{\mathrm{d}'L} \ , \quad \psi_{\mathrm{u}R} = V_{\mathrm{u}R} \psi_{\mathrm{u}'R} \ , \quad \psi_{\mathrm{d}R} = V_{\mathrm{d}R} \psi_{\mathrm{d}'R} \tag{11.54}$$

のそれぞれの成分が (10.8) の形の質量をもった粒子の自由運動の方程式

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_{\mathrm{u}L,R} - c M_\mathrm{u}^\mathrm{diag} \psi_{\mathrm{u}R,L} = 0 \tag{11.55}$$

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi_{\mathrm{d}L,R} - c M_\mathrm{d}^\mathrm{diag} \psi_{\mathrm{d}R,L} = 0 \tag{11.56}$$

を満たすことがわかる．

3 世代のクォーク $\psi_L^i, \psi_{\mathrm{u}'R}^i, \psi_{\mathrm{d}'R}^i$ は，ゲージ群の量子数に関しては世代によらずに同じなので，世代の指定の仕方にはもともと 3 行 3 列のユニタリー変換

$$\begin{pmatrix} \psi_{\mathrm{u}'L} \\ \psi_{\mathrm{d}'L} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} V_L \psi_{\mathrm{u}'L} \\ V_L \psi_{\mathrm{d}'L} \end{pmatrix} \ , \quad \psi_{\mathrm{u}'R} \to V_R^{(\mathrm{u})} \psi_{\mathrm{u}'R} \ , \quad \psi_{\mathrm{d}'R} \to V_R^{(\mathrm{d})} \psi_{\mathrm{d}'R} \tag{11.57}$$

の任意性がある．(11.54) の変換のうち，$\psi_{\mathrm{u}'L}, \psi_{\mathrm{u}'R}, \psi_{\mathrm{d}'R}$ の変換をこれらの自由度に吸収する（$V_L = V_{\mathrm{u}L}^{-1}$，$V_R^{(\mathrm{u})} = V_{\mathrm{u}R}^{-1}$，$V_R^{(\mathrm{d})} = V_{\mathrm{d}R}^{-1}$ とおく）と，ゲージ群 $SU(2)$ の表現の固有状態は，クォーク・フレーバーの固有状態により

$$\psi_{\mathrm{u}'L} = \psi_{\mathrm{u}L} \ , \quad \psi_{\mathrm{d}'L} = V_{\mathrm{u}L} V_{\mathrm{d}L}^{-1} \psi_{\mathrm{d}L} \ , \quad \psi_{\mathrm{u}'R} = \psi_{\mathrm{u}R} \ , \quad \psi_{\mathrm{d}'R} = \psi_{\mathrm{d}R} \tag{11.58}$$

と表される．(11.58) で生き残った行列

$$V_{\mathrm{u}L}V_{\mathrm{d}L}^{-1} \tag{11.59}$$

が前章で現れたキャビボ・小林・益川行列 V(10.30) である．

質量行列 $M_{\mathrm{u}}, M_{\mathrm{d}}$ の対角化 (11.51) には $M_{\mathrm{u}}^{\mathrm{diag}}, M_{\mathrm{d}}^{\mathrm{diag}}$ を不変に保つ位相変換の不定性がある．位相変換の対角行列

$$U_{\mathrm{u}} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_3} \end{pmatrix}, \quad U_{\mathrm{d}} \equiv \begin{pmatrix} e^{i\beta_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\beta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta_3} \end{pmatrix} \tag{11.60}$$

によって (11.51) の変換行列を

$$V_{\mathrm{u}L,R} \to U_{\mathrm{u}}V_{\mathrm{u}L,R}\ , \quad V_{\mathrm{d}L,R} \to U_{\mathrm{d}}V_{\mathrm{d}L,R} \tag{11.61}$$

と置き換えても対角化は不変である．この自由度をあらわに含めると V は

$$V = U_{\mathrm{u}}V_{\mathrm{u}L}V_{\mathrm{d}L}^{-1}U_{\mathrm{d}}^{-1} \tag{11.62}$$

と表される．

3 行 3 列のユニタリー行列 $V_{\mathrm{u}L}V_{\mathrm{d}L}^{-1}$ は，一般に，実数で数えて 9 個の自由度をもっている．その内 3 個は実数の回転角 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ で表現され，残りの 6 個は位相の自由度 $\delta_1, \cdots, \delta_6$ として表される．$U_{\mathrm{u}}, U_{\mathrm{d}}$ の 6 個の位相の不定性のうち単位行列に比例する共通の位相変換 $U_{\mathrm{u}} = U_{\mathrm{d}} = e^{i\rho}I$ は V に何の効果も及ぼさない．残りの 5 個の位相の不定性を用いて $V_{\mathrm{u}L}V_{\mathrm{d}L}^{\dagger}$ の位相の自由度のうち 5 個は消し去ることができる．しかし，残り 1 個の位相の自由度 δ は一般には消し去ることができない．したがって V は一般には複素行列になる．そのため，左巻きクォークと $\mathrm{W}^{\pm}$ の相互作用

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{\mathrm{u}L}^{i} - \frac{g}{\sqrt{2}c}\sum_{j=\mathrm{d,s,b}}\gamma^{\mu}V_{ij}W_{\mu}^{+}\psi_{\mathrm{d}L}^{j} = 0 \qquad i = \mathrm{u,c,t} \tag{11.63}$$

$$i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{\mathrm{d}L}^{i} - \frac{g}{\sqrt{2}c}\sum_{j=\mathrm{u.c,t}}\gamma^{\mu}V_{ji}{}^{*}W_{\mu}^{-}\psi_{\mathrm{u}L}^{j} = 0 \qquad i = \mathrm{d,s,b} \tag{11.64}$$

の結合定数行列 gV_{ij} は実数である保証はなくなる．

11.6 CP 対称性とその破れ

第 10 章で $W^{\pm}$ や Z^0 の相互作用が空間反転 P の対称性を破っていることを見たが，それらは荷電共役変換 C についての対称性も破っている．荷電共役の対称性は粒子と反粒子が同じ運動法則に従うときに実現される．電子の左巻き状態 e_L^- は $W^{\pm}$ と相互作用するが陽電子の左巻き状態 e_L^+ は $W^{\pm}$ と相互作用をしないので，この対称性は満たされていない．電子だけでなくすべてのレプトンとクォークについて同様である．

空間反転の操作が，左巻きの粒子と右巻きの粒子を入れ替える操作と同等であったことを思い出そう．e_L^- に C の変換をすると e_L^+ になり，それに P の変換をすると e_R^+ となる．したがって，2 つの変換を続けて行う CP 変換のもとで，e_L^- は e_R^+ となり，e_R^+ は e_L^- と同様 $W^{\pm}$ と相互作用をする．このことから，弱い相互作用は P と C を個別には保存しないが CP 変換のもとでは対称なのではないかと推測される．

レプトンと $W^{\pm}$ の CP 変換は第 8 章で導いた C と P の変換を合成して

$$
\begin{aligned}
\psi_{eL}(t,\vec{x}) &\to \psi_{eL}^{\mathrm{CP}}(t,\vec{x}) = \gamma^0 \psi_{e^+R}(t,-\vec{x}) \\
\psi_{\nu L}(t,\vec{x}) &\to \psi_{\nu L}^{\mathrm{CP}}(t,\vec{x}) = \gamma^0 \psi_{\bar{\nu}R}(t,-\vec{x}) \\
W_0^{\pm}(t,\vec{x}) &\to W_0^{\mathrm{CP}\pm}(t,\vec{x}) = -W_0^{\mp}(t,-\vec{x}) \\
W_i^{\pm}(t,\vec{x}) &\to W_i^{\mathrm{CP}\pm}(t,\vec{x}) = +W_i^{\mp}(t,-\vec{x})
\end{aligned}
\tag{11.65}
$$

と求まる．レプトンと $W^{\pm}$ の相互作用の式 (10.14) でこの置き換えをし，多少計算をすると

$$
i\hbar\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\psi_{e^+R} + \frac{g}{\sqrt{2}c}\gamma^{\mu}W_{\mu}^{+}\psi_{\bar{\nu}_e R} = 0 \tag{11.66}
$$

となるが，この式は (10.14) の複素共役をとって，左から $C\gamma^{0T}$ をかけることによって導かれる反粒子の運動方程式と一致する．すなわち，レプトンと $W^{\pm}$ の相互作用は (11.65) の CP 変換のもとで不変である．Z^0 との相互作用も同様に CP 対称であることが確かめられる．

これらの CP 対称性が実現されたのは，結合定数が実数であったことによっている．クォークと $W^{\pm}$ との相互作用 (11.63),(11.64) においても，クォークの波動関数の位相をうまく調整することによって，結合定数 gV_{ij} を実数にす

ることができれば，運動方程式はCP変換について対称となる．その時には弱い相互作用における保存量として，CPのパリティが実現されることになる．弱い相互作用の諸現象は，CP対称性がかなり良い精度で成り立っていること，しかしそれは厳密ではなくある程度の大きさで破れていることを示している．CP対称性の破れが引き起こされる主因は，クォークと$W^{\pm}$との相互作用の結合定数行列が実数ではなく複素数を含んでいることによる．

CP対称性の破れが物理現象にどのように現れるか，その一例として，中性Kメソンのπメソンへの崩壊について簡単に考察しよう．8.6節と8.7節で調べたPおよびCの変換のもとでのメソンの変換性から，中性KメソンはCP変換のもとで

$$\mathcal{CP}|\mathrm{K}^0\rangle = -|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle \tag{11.67}$$

と変換することがわかる．クォーク・フレーバーが保存していたらK^0と$\bar{\mathrm{K}}^0$が質量固有状態としてメソンの状態になるが，$W^{\pm}$の弱い相互作用はクォーク・フレーバーを変化させるので，高次の量子効果によって$|\mathrm{K}^0\rangle$と$|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle$の間に遷移の行列要素が現れる（自習問題[6]参照）．したがって，質量の固有状態は$|\mathrm{K}^0\rangle$と$|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle$の重ね合わせの状態になる．

まず，CP対称性が破れずに成り立っているとしよう．この場合，質量ハミルトニアン$\mathcal{H}$は$\mathcal{CPH}(\mathcal{CP})^{-1} = \mathcal{H}$を満たすので，実数パラメーター$\Delta E$を用いて

$$\mathcal{H} = m_{\mathrm{K}}c^2\left[\, |\mathrm{K}^0\rangle\langle\mathrm{K}^0| + |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\langle\bar{\mathrm{K}}^0|\, \right] + \Delta E\left[\, |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\langle\mathrm{K}^0| + |\mathrm{K}^0\rangle\langle\bar{\mathrm{K}}^0|\, \right] \tag{11.68}$$

と表される．$\mathcal{H}$の固有状態はK^0と$\bar{\mathrm{K}}^0$を1対1で重ね合わせた

$$|\mathrm{K}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathrm{K}^0\rangle - |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\right) \ , \quad |\mathrm{K}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathrm{K}^0\rangle + |\bar{\mathrm{K}}^0\rangle\right) \tag{11.69}$$

で与えられ，それぞれはCPのパリティが$+1$と-1の固有状態である．それらの質量差$2\Delta E$の観測値は$2\Delta E = 3.521 \times 10^{-12}$ MeVでとても小さい．

これらがπメソン2個の状態$\pi^+\pi^-$，$\pi^0\pi^0$に崩壊する過程を考えよう．πメソンのCP変換は

$$\mathcal{CP}|\pi^{\pm}\rangle = |\pi^{\mp}\rangle \ , \quad \mathcal{CP}|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \tag{11.70}$$

と求まる．終状態のCP変換は，2粒子間の軌道角運動量をLとすると

$$\mathcal{CP}|\pi^+\pi^-\rangle = |\pi^-\pi^+\rangle = (-1)^L|\pi^+\pi^-\rangle \ , \quad \mathcal{CP}|\pi^0\pi^0\rangle = |\pi^0\pi^0\rangle \tag{11.71}$$

となるが，角運動量の保存により $L=0$ であるから，これらはいずれも CP のパリティが +1 の固有状態である．したがって K_1 は 2π に崩壊することができる．K_2 は CP 対称性によって 2π は禁止されるので，崩壊は 3π 状態となる．このため，以下のとおり，K_1 は寿命が短く K_2 は寿命が長い．

$$\tau(K_1) = 0.896 \times 10^{-10}\ \mathrm{sec}\ ,\ \tau(K_2) = 5.12 \times 10^{-8}\ \mathrm{sec} \tag{11.72}$$

それぞれ K_S(short), K_L(long) と呼ばれる．

実際には CP 対称性はわずかではあるが破れており，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ の中には複素数が現れる．そのため，K_1, K_2 がわずかに混合した状態 $K_S \simeq K_1 + \epsilon K_2$, $K_L \simeq K_2 + \epsilon K_1$ $(\epsilon \simeq 10^{-3})$ が実際のメソンの状態として実現されている．また，$K_2 \to 2\pi$ を起す CP 対称性を破る相互作用も現れてくる．それらの結果，K_L は主要な 3π への崩壊に加え，CP の破れを通して，わずかではあるが（$R \simeq 3 \times 10^{-3}$ の分岐比で）2π への崩壊も起している．

K メソンに限らず，クォーク・フレーバーが変化するいろいろな過程に CP の破れは現れている．筑波の高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所で進められている B ファクトリー実験では，b クォークを含んだメソンにおける CP 対称性の破れが詳細に測定されてきた．その結果，ハドロンの弱い相互作用でこれまでに観測されている CP 対称性の破れは，キャビボ・小林・益川行列 V_{ij} の中に存在する 1 個の位相パラメター δ の効果によってほぼ理解できることが明らかになってきている．

レプトンにおいても，これまでニュートリノの質量を 0 としたので，湯川結合行列は 1 種類 y_e だけとなり，最初からそれを対角行列として各世代ごとに (11.36), (11.37) を書き下しておいてよかったが，近年の実験観測の結果，ニュートリノにもわずかではあるが質量があることが明らかになってきている．その効果まで取り入れると，レプトンと $W^{\pm}$ の相互作用においても CP 対称性は破れると予測される．

これまでヒッグス・スカラーは (11.1) の 1 種類だけだとしてきたが，実験的にはまだ存在が確認されていないので，それらが何種類あるかはわかっていない．それらが複数個あると，さらに新たな CP 対称性の破れの相互作用が現れる．

CP 対称性の破れは，宇宙のありように深く関わっている．この宇宙に存在する物質は電子やクォーク等の粒子で構成されており，反粒子で構成された反

物質は存在していないことが宇宙観測でわかっている．宇宙が誕生した時点では，粒子と反粒子は等量あったと推測される．CP 対称性が破れていなければ，粒子と反粒子はすべて宇宙の進化の過程で対消滅を起し，現在の宇宙は実現されない．CP 非対称性は粒子の反応振幅 $A(\mathrm{a} \to \mathrm{b})$ と反粒子の反応振幅 $A(\bar{\mathrm{a}} \to \bar{\mathrm{b}})$ の大きさが異なることを意味している．その効果によって，宇宙の進化の過程で粒子の数より反粒子の数がわずかに少なくなり，その差額分の粒子が生き残って，現在の宇宙を形作っていると考えられている．

自習問題

[1]　4元カレント (11.32),(11.33) は4元電荷カレントの保存式 (6.19) および4元色カレントの保存式（第7章問題[2]参照）と同様に，$[D_\nu, \sum_{a=1}^{3} I_a j^{a\nu}] = 0$, $\partial_\nu j_Y^\nu = 0$ を満たさなければならない．これらが ϕ の運動方程式 (11.5) によって実現されていることを確かめよ．

[2]　ユニタリーゲージ (11.22) のもとでヒッグス場のカレント (11.32),(11.33) から

$$\frac{1}{c} j^{\pm}_{\mathrm{W}\mu} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}c}(j^1_\mu \mp i j^2_\mu) = -\frac{m_W^2 c^2}{\hbar^2}\left(1 + \frac{h^0}{\sqrt{2}v}\right)^2 W^{\pm}_\mu \tag{11.73}$$

$$\frac{1}{c} j_{\mathrm{Z}\mu} \equiv \frac{1}{c}(\cos\theta_W j^3_\mu - \sin\theta_W j_{Y\mu}) = -\frac{m_Z^2 c^2}{\hbar^2}\left(1 + \frac{h^0}{\sqrt{2}v}\right)^2 Z_\mu \tag{11.74}$$

$$\frac{1}{c} j_{\mathrm{A}\mu} \equiv \frac{1}{c}(\sin\theta_W j^3_\mu + \cos\theta_W j_{Y\mu}) = 0 \tag{11.75}$$

を導け．これをもとに $\mathrm{W}^{\pm}, \mathrm{Z}^0$ とヒッグス粒子 h^0 との相互作用を考察せよ．

[3]　$\mathrm{W}^{\pm}, \mathrm{Z}^0$ の質量の関係式 (11.21) が数値的によく成り立っていることを確かめよ．

[4]　任意の正方行列 A（$\det A \neq 0$ とする）から作った $A^\dagger A$ はエルミート行列である．その固有値が正であることを確かめよ．したがって $V^\dagger A^\dagger A V = R^2$ が正の対角行列となるユニタリー行列 $V(V^\dagger = V^{-1})$ が必ず存在する．行列 U を $UR = AV$ で定義する．U がユニタリー行列 $(U^\dagger U = UU^\dagger = 1)$ であることを確かめよ．したがって任意の正方行列は双ユニタリー変換 $U^\dagger A V = R$ によって実対角化することができる．

[5] もしクォークの世代が2世代しかなかったら，キャビボ・小林・益川行列 V(11.62) が実数行列にとれることを示せ．したがってWの相互作用はCP対称になる．

[6] $\mathrm{K}^0 \to \bar{\mathrm{K}}^0$ の遷移の過程のファインマン図を描け．それをもとに遷移の確率振幅が

$$A(\mathrm{K}^0 \to \bar{\mathrm{K}}^0) \propto \frac{g^4}{m_{\mathrm{W}}^4} \sum_{\mathrm{i,j=u,c,t}} V_{\mathrm{is}}^* V_{\mathrm{id}} V_{\mathrm{js}}^* V_{\mathrm{jd}} f(m_{\mathrm{i}}, m_{\mathrm{j}}) \tag{11.76}$$

の形になることを示せ．もし $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{c}} = m_{\mathrm{t}}$ だったら $A(\mathrm{K}^0 \to \bar{\mathrm{K}}^0) = 0$ となりこの遷移が起らないことを確かめよ．

コラム：カイラル対称性と π メソン

この本の締めくくりとして，幾種類も存在するハドロンの中で，どうして π メソンだけが特別に小さな質量しかもっていないのか，その秘密をあかそう．

グルーオンが媒介する量子色力学において，uクォークとdクォークの質量を $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}}$ とおくと，$SU(2)$ のアイソスピン対称性が実現されていた．グルーオンと相互作用するu, dの運動方程式は $SU(2)$ の変換行列 U によるアイソスピン変換

$$\begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{u}' \\ \mathrm{d}' \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{d} \end{pmatrix}$$

のもとで対称であった．しかし，m_{u} と m_{d} は等しいというよりも，ともに小さいと言う方が真実に近い．そうすると $m_{\mathrm{u}} = m_{\mathrm{d}} = 0$ とおくと何が起るかが気にかかる．

質量が0のディラック方程式は，カイラリティ分解の式 (10.9), (10.10) からわかるように，ψ_L と ψ_R が完全に分離した2つの方程式に分解される．その結果，それらの運動方程式は

$$\begin{pmatrix} \mathrm{u}_L \\ \mathrm{d}_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathrm{u}_R \\ \mathrm{d}_R \end{pmatrix}$$

のそれぞれを独立な $SU(2)$ の変換行列 U_L, U_R で変換しても対称になる．2つの対称性があるのだから $SU(2)_L \times SU(2)_R$ である．これはカイラル対称性と呼ばれる．アイソスピン対称性は $U_L = U_R \equiv U$ とおいた対称性になっている．

グルーオンの強い相互作用はクォークと反クォークの間に大きな結合エネルギーを生みだし，その結果それらは真空中にボーズ・アインシュタイン凝縮を起し

$$\langle \bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} \rangle = \langle \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d} \rangle \neq 0$$

が実現されている．ūuをカイラリティで分解するとūu = ū$_R$u$_L$ + ū$_L$u$_R$ （ū$_R$ ≡ (u$_R$)$^\dagger\gamma^0$ と定義している）と表されるので，これらの真空期待値は

$$V \equiv \begin{pmatrix} \langle \bar{\mathrm{u}}_R \mathrm{u}_L \rangle & \langle \bar{\mathrm{d}}_R \mathrm{u}_L \rangle \\ \langle \bar{\mathrm{u}}_R \mathrm{d}_L \rangle & \langle \bar{\mathrm{d}}_R \mathrm{d}_L \rangle \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を意味する．$SU(2)_L \times SU(2)_R$ はこの真空期待値を $V \to U_L V U_R^{-1}$ に変換するので V は不変には保たれていない．$SU(2)_L \times SU(2)_R$ は自発的対称性の破れを起している．しかし，$U_L = U_R$ とおいたアイソスピンの $SU(2)$ 変換は V を変化させないので破れずに保たれている．

南部・ゴールドストーンの定理に従うと，破れた対称性の数 $3 + 3 - 3 = 3$ だけ0質量の南部・ゴールドストーン粒子が現れることになる．これらが π メソン π^+, π^-, π^0 である．実際には $m_{\mathrm{u}}, m_{\mathrm{d}}$ は0でないので，$SU(2)_L \times SU(2)_R$ は厳密な対称性ではない．その結果 π メソンに，わずかではあるが，有限の質量が現れている．

sクォークの質量も $m_{\mathrm{s}} = 0$ にすると，カイラル対称性は $SU(3)_L \times SU(3)_R$ に拡大する．$\langle \bar{\mathrm{u}}\mathrm{u} \rangle = \langle \bar{\mathrm{d}}\mathrm{d} \rangle = \langle \bar{\mathrm{s}}\mathrm{s} \rangle$ によって対称性が自発的に $SU(3)$ まで落ちると，南部・ゴールドストーン粒子に $\mathrm{K}^{\pm}, \mathrm{K}^0, \bar{\mathrm{K}}^0, \eta$ が加わる．$SU(3)_L \times SU(3)_R$ のカイラル対称性は $m_{\mathrm{s}} \simeq 100\ \mathrm{MeV}/c^2$ によって大きく破れているので，これらの粒子の質量は0から大きくはずれてしまい，それらは π メソンよりかなり重たくなっているのである．

CHAPTER A

場の量子論概説

A.1 場の方程式

ハミルトニアン演算子が $\mathcal{H}$ で与えられた量子力学系において，時刻 t の量子力学的状態 $|\Psi(t)\rangle$ の運動は，シュレディンガーの運動方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = \mathcal{H}|\Psi(t)\rangle \tag{A.1}$$

によって定まる．したがって，時刻 $t = 0$ に状態が $|\Psi(0)\rangle = |\Psi\rangle$ であるとすると $|\Psi(t)\rangle$ は

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|\Psi\rangle \tag{A.2}$$

と求まる．

$\mathcal{O}$ を力学系に付随した何らかの演算子としよう．(A.1) に従う 2 つの状態 $|\Psi_a(t)\rangle$, $|\Psi_b(t)\rangle$ について $\mathcal{O}$ の行列要素は，(A.2) により

$$\langle\Psi_b(t)|\mathcal{O}|\Psi_a(t)\rangle = \langle\Psi_b|\mathcal{O}(t)|\Psi_a\rangle\ , \qquad |\Psi_{a,b}\rangle \equiv |\Psi_{a,b}(0)\rangle \tag{A.3}$$

と表すことができる．ここに $\mathcal{O}(t)$ は

$$\mathcal{O}(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\mathcal{O}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \tag{A.4}$$

である．(A.3) の左辺は状態が運動することにより行列要素が時刻 t とともに変化することを表している．右辺は，その行列要素を，状態は $t = 0$ で固定したままで，演算子が (A.4) により時刻 t とともに運動しているように見ている．前者の見方はシュレディンガー描像，後者はハイゼンベルグ描像と呼ばれ

る．ハイゼンベルグ描像の演算子 $\mathcal{O}(t)$ の運動は，ハミルトニアンとの交換関係 $[\mathcal{O}(t), \mathcal{H}] \equiv \mathcal{O}(t)\mathcal{H} - \mathcal{H}\mathcal{O}(t)$ により，(A.4) から

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O}(t) = [\mathcal{O}(t), \mathcal{H}] \tag{A.5}$$

で定まる．この式はハイゼンベルグの運動方程式と呼ばれる．ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\mathcal{H}e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} = \mathcal{H} \tag{A.6}$$

となるので t 依存性はない．これはエネルギーの保存則を意味している．

場の量子論において，あらゆる粒子の運動は，それぞれに付随して，空間の各点 $\vec{x}$ に備わっている場の演算子 $\psi(\vec{x})$ の運動として表現される．その力学系のハミルトニアン演算子を $\mathcal{H}$ とすると，ハイゼンベルグ描像の場の演算子

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}\psi(\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} \tag{A.7}$$

の運動がハイゼンベルグの運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \vec{x}) = [\psi(t, \vec{x}), \mathcal{H}] \tag{A.8}$$

によって定まっている．

場の量子系の運動量演算子 $\vec{\mathcal{P}}$ は，あらゆる場の演算子との間で交換関係

$$-i\hbar\vec{\nabla}\psi(t, \vec{x}) = [\psi(t, \vec{x}), \vec{\mathcal{P}}] \tag{A.9}$$

を実現する演算子として定義される．後に示すように，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は空間の各点 $\vec{x}$ のエネルギー密度 $\mathcal{E}(\vec{x})$ の積分 $\mathcal{H} = \int d^3\vec{x}\ \mathcal{E}(\vec{x})$ で表されるので，$\vec{\mathcal{P}}$ と $\mathcal{H}$ との交換関係は

$$[\mathcal{H}, \vec{\mathcal{P}}] = \int d^3\vec{x}\ [\mathcal{E}(\vec{x}), \vec{\mathcal{P}}] = -i\hbar\int d^3\vec{x}\ \vec{\nabla}\mathcal{E}(\vec{x}) = 0 \tag{A.10}$$

である．したがって $\vec{\mathcal{P}}$ は保存量となる．(A.8),(A.9) は $\mathcal{H}$ と $\vec{\mathcal{P}}$ が 4 元運動量演算子

$$\mathcal{P}^\mu = (\mathcal{H}/c, \vec{\mathcal{P}}) \tag{A.11}$$

をなしていることを意味している．

まず，自由運動をする電子について考察しよう．電子の場 $\psi^i(x) \equiv \psi^i(t, \vec{x})$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ はディラック方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi(x) = 0 \tag{A.12}$$

に従う．この式を

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x) = H\psi(x)\ , \qquad H \equiv c\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla}) + mc^2\beta \tag{A.13}$$

と表して (A.8) と比較することにより，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ と $\psi(x)$ が交換関係

$$[\ \psi(x), \mathcal{H}\ ] = H\psi(x) \tag{A.14}$$

を満たさなければならないことがわかる．

電子 e やその反粒子である陽電子 $\bar{\mathrm{e}}$ が 1 個も存在していない状態，すなわち真空を $|0\rangle$ と表そう．真空状態のエネルギーが $E_0 = 0$ となるようにエネルギーの原点を定めると

$$\mathcal{H}|0\rangle = 0 \tag{A.15}$$

である．次に，正のエネルギーをもって自由運動している 1 電子の状態を

$$|\Phi_{\mathrm{e}}(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t}|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle \tag{A.16}$$

と表そう．$\psi^i(x)$ が量子論として何らかの意味をもっているのであれば，それは $|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle$ と $|0\rangle$ の間に 0 でない行列要素をもっていると期待される．そこで

$$u_{\mathrm{e}}^i(x) \equiv \langle 0|\psi^i(x)|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle = \langle 0|\psi^i(\vec{x})|\Phi_e(t)\rangle \tag{A.17}$$

を定義しよう．2 番目の等号で $\langle 0|\mathcal{H} = 0$ により $\langle 0|e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t} = \langle 0|$ を用いた．(A.17) は場の量子論としての行列要素がとられているので $u_{\mathrm{e}}^i(x)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ は 4 組の単なる複素関数である．$\psi^i(x)$ が (A.12) を満たしているので $u_{\mathrm{e}}^i(x)$ もディラック方程式を満たす．(A.17) と (A.8) より

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathrm{e}}(x) = \langle 0|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x)|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle = \langle 0|[\psi(x), \mathcal{H}]|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle \tag{A.18}$$

であるから，$|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle$ が正のエネルギー E をもった状態 $\mathcal{H}|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle = E|\Phi_{\mathrm{e}}\rangle$ であれば

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathrm{e}}(x) = Eu_{\mathrm{e}}(x) \tag{A.19}$$

すなわち，$u_e(x)$ はディラック方程式の正エネルギー解になっている．したがって $u_e(x)$ は正のエネルギーをもって運動する電子の時空点 x^μ における存在の確率振幅を与えている．

状態 $|\Phi_e\rangle$ と正エネルギー解 $u_e(x)$ とは1対1に対応している．電子が4元運動量 $\mathcal{P}^\mu$ の固有状態 $\mathcal{P}^\mu|\Phi_e\rangle = p^\mu|\Phi_e\rangle, (p^\mu = (E/c, \vec{p}))$ であれば (A.8), (A.9), (A.12) より，波動関数 $u_e(x)$ は

$$u_e(x) = u(\vec{p})e^{-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu}\ , \quad (p_\mu\gamma^\mu - mc)u(\vec{p}) = 0\ ,\ \ p_\mu p^\mu = m^2c^2 \tag{A.20}$$

である．これを満たす正エネルギーの $u(\vec{p})$ は線形独立な解が2つあり，それらは電子の2つのスピン状態を表している．

場の演算子 $\psi^i(x)$ は $|\Phi_e\rangle$ にかかると，正のエネルギーをもった電子を時空点 x^μ で消し去る作用をする．そのような演算子は消滅演算子と呼ばれる．次に (A.17) の複素共役をとると

$$u_e^{i*}(x) = \langle 0|\psi^i(x)|\Phi_e\rangle^* = \langle\Phi_e|\psi^{i\dagger}(x)|0\rangle \tag{A.21}$$

となる．この式は，$\psi^{i\dagger}(x)$ が真空 $|0\rangle$ にかかると，正のエネルギーをもった電子を1個，時空点 x^μ で作り出す作用をすることを示している．このような演算子は生成演算子と呼ばれる．

場 $\psi(x)$ がディラック方程式 (A.12) を満たしていると，8.3節で与えた荷電共役場

$$\psi^{ci}(x) \equiv (C\gamma^{0T})^{ij}\psi^{j\dagger}(x) \tag{A.22}$$

も同じディラック方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi^c(x) = 0 \tag{A.23}$$

を満たす．$\psi^c(x)$ は電子の反粒子である陽電子 $\bar{\mathrm{e}}$ にとって場の演算子としてのはたらきをする．したがって，正のエネルギー E をもった陽電子の状態 $|\Phi_{\bar{e}}\rangle$ に作用すると消滅演算子としてはたらき，

$$u_{\bar{e}}^i(x) \equiv \langle 0|\psi^{ci}(x)|\Phi_{\bar{e}}\rangle = (C\gamma^{0T})^{ij}\langle 0|\psi^{j\dagger}(x)|\Phi_{\bar{e}}\rangle \tag{A.24}$$

は時空点 x^μ における陽電子の存在の確率振幅を与える．この式の複素共役をとり，少し計算を行うと

$$u_{\bar{e}}^{(-)}(x) \equiv C\gamma^{0T}u_{\bar{e}}^*(x) = \langle\Phi_{\bar{e}}|\psi(x)|0\rangle \tag{A.25}$$

となる．$u_e^{(-)}(x)$ は (A.17) の $u_e(x)$ と同様，ディラック方程式を満たすが，$\langle\Phi_{\bar{e}}|\mathcal{H} = E\langle\Phi_{\bar{e}}|$ により

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u_e^{(-)}(x) = \langle\Phi_{\bar{e}}|[\psi(x), \mathcal{H}]|0\rangle = -Eu_e^{(-)}(x) \tag{A.26}$$

であるから，負のエネルギーの解となる．すなわち，ディラック方程式は正のエネルギー解だけでなく負のエネルギー解もゆるしているが，それは，場 $\psi(x)$ が正のエネルギーの電子を消滅させる作用をもっているだけでなく，正のエネルギーをもった陽電子を生成する作用も兼ね備えていることを意味している．場 $\psi^\dagger(x)$ はその逆の作用をする．

A.2 ハミルトニアンと場の反交換関係

ハミルトニアンが (A.13) の質点系の量子力学において，波動関数が $\psi(x)$ の状態のエネルギーの期待値は

$$\langle E\rangle = \int d^3\vec{x}\psi^\dagger(x)H\psi(x)\ , \quad H \equiv c\vec{\alpha}\cdot(-i\hbar\vec{\nabla}) + mc^2\beta \tag{A.27}$$

であった．場の量子論におけるハミルトニアン演算子 $\mathcal{H}$ は，波動関数 $\psi(x)$ と $\psi^\dagger(x)$ を場の演算子で置き換えた

$$\mathcal{H} = \int d^3\vec{x}\psi^\dagger(x)H\psi(x) + [\text{定数}] \tag{A.28}$$

で与えられる．[定数] は真空 $|0\rangle$ のエネルギーが 0 となるように決めるのであったが，それ以外には何のはたらきもしないので，以後省略する．

場の量子論の力学の構造は，場の演算子 $\psi(x), \psi^\dagger(x)$ がどのような（反）交換関係に従うかで定まる．それはハミルトニアンとの間で交換関係 (A.14)

$$\left[\psi(\vec{x}), \int d^3\vec{y}\psi^\dagger(\vec{y})H\psi(\vec{y})\right] = H\psi(\vec{x}) \tag{A.29}$$

を実現するものでなければならない．(A.6) により $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}$ だから $\mathcal{H}(t)$ の時刻 t は随意にとってよい．

交換関係の恒等式

$$[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z] \tag{A.30}$$

を考慮すると，場に交換関係

$$[\psi^i(\vec{x}), \psi^{j\dagger}(\vec{y})] = \delta^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ ,\quad [\psi^i(\vec{x}), \psi^j(\vec{y})] = 0\ ,\quad [\psi^{i\dagger}(\vec{x}), \psi^{j\dagger}(\vec{y})] = 0 \tag{A.31}$$

を設定すると (A.29) が実現されることがわかる．しかし，このようにして構成された量子論は，以下のように，電子や陽電子の運動を表現する物理的に意味のある枠組みとしては受け入れがたい問題をはらんでいる．力学系は電子の場 $\psi(x), \psi^\dagger(x)$ で表しても，陽電子の場 $\psi^c(x), \psi^{c\dagger}(x)$ で表しても等しく記述されるべきであるが，(A.31) から $\psi^c(x)$ と $\psi^{c\dagger}(x)$ についての交換関係を求めると

$$[\psi^{ci}(\vec{x}), \psi^{cj\dagger}(\vec{y})] = -\delta^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \tag{A.32}$$

となり (A.31) と食い違う．さらに，ハミルトニアン $\mathcal{H}$ も

$$\mathcal{H} = -\int d^3\vec{x}\psi^{c\dagger}(x)H\psi^c(x) \tag{A.33}$$

となる．これは，電子が正のエネルギーをもつように量子系を表現すると，陽電子が負のエネルギーをもって現れることを意味している．

物理的に意味のある量子系の表現を与える鍵は反交換関係による恒等式

$$[X, YZ] = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\}\ ,\qquad \{X, Y\} \equiv XY + YX \tag{A.34}$$

である．場に反交換関係

$$\{\psi^i(\vec{x}), \psi^{j\dagger}(\vec{y})\} = \delta^{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ ,\quad \{\psi^i(\vec{x}), \psi^j(\vec{y})\} = 0\ ,\quad \{\psi^{i\dagger}(\vec{x}), \psi^{j\dagger}(\vec{y})\} = 0 \tag{A.35}$$

を設定しても (A.29) は実現される．この場合には，場を陽電子の場 ψ^c で表しても全く同じ表式が成立し，どこにも問題は生じない．運動量演算子 $\vec{\mathcal{P}}$ は

$$\vec{\mathcal{P}} = \int d^3\vec{x}\psi^\dagger(x)(-i\hbar\vec{\nabla})\psi(x) \tag{A.36}$$

と与えられ，反交換関係 (A.35) によって交換関係 (A.9) が実現される．

反交換関係を自由場のハミルトニアン (A.28) にもとづいて導いたが，(A.35) は元来，場それ自体が備えている特性であり，量子力学における座標と運動量の交換関係と同様に，場がどのように相互作用していても成り立つ．

場が反交換関係に従うということは，場が表す粒子の統計性に反映される．座標点 $\vec{x}$ と $\vec{y}$ に電子が存在している状態は次の2通りの表し方ができる．

$$\psi^\dagger(\vec{x})\psi^\dagger(\vec{y})|0\rangle\ , \qquad \psi^\dagger(\vec{y})\psi^\dagger(\vec{x})|0\rangle \tag{A.37}$$

$\psi^\dagger(x)$ の反可換性は，これら2つの状態が符号が逆であること，すなわち，2個の電子を入れ替えたとき，状態の符号が反転することを意味している．したがって，電子はフェルミ・ディラック統計に従うことになる．電子同士だけでなく，電子と陽電子の状態も，それぞれを生成する演算の順序を変えると状態の符号が逆転する．異なる種類の場の間の可換・反可換はどちらでも構わないが，通常フェルミ場同士はすべて反可換となるように取り扱われる．

A.3 スカラー場

自由運動をするスピンが0の実スカラー場 $\phi(x)$ を考察しよう．量子論においては場の演算子はエルミートの条件

$$\phi^\dagger(x) = \phi(x) \tag{A.38}$$

が課される．場 $\phi(x)$ が表す粒子は真性中性粒子であり，反粒子は粒子と等しい．運動方程式はクライン・ゴルドン方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) = 0 \tag{A.39}$$

である．この方程式は時刻 t について2階の微分方程式なので，ハイゼンベルグ方程式 (A.8) にもとづいた量子論の枠組みにおさめるためには，次のように階数低下の手続きをしなければならない．

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = c^2\pi(x) \tag{A.40}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = -\left(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) \tag{A.41}$$

この2組の方程式は，$\phi(x)$ を正準座標，$\pi(x)$ を正準運動量とみなすと，調和振動子の形をしている．したがって，場の交換関係として

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\hbar\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ ,\ [\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0\ ,\ [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0 \tag{A.42}$$

を設定し，ハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\left(c^2\pi^2(\vec{x}) + \phi(\vec{x})\left(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{x})\right) \tag{A.43}$$

と与えると，ハイゼンベルグの運動方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(x) = [\phi(x), \mathcal{H}]\ , \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\pi(x) = [\pi(x), \mathcal{H}] \tag{A.44}$$

によって (A.40),(A.41) が実現される．運動量演算子 $\vec{\mathcal{P}}$ は

$$\vec{\mathcal{P}} = -\int d^3\vec{x}\ \pi(x)\vec{\nabla}\phi(x) \tag{A.45}$$

で与えられる．

場 $\phi(x)$ が表す粒子 s の 1 粒子状態を $|\Phi_{\rm s}\rangle$ と書こう．$|\Phi_{\rm s}\rangle$ と真空 $|0\rangle$ についての $\phi(x)$ の行列要素

$$f_{\rm s}(x) \equiv \langle 0|\phi(x)|\Phi_{\rm s}\rangle \tag{A.46}$$

は $\phi(x)$ と同様，クライン・ゴルドン方程式を満たす．$|\Phi_{\rm s}\rangle$ が正のエネルギー E をもっていれば，それは正エネルギー解である．

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}f_{\rm s}(x) = \langle 0|[\phi(x), \mathcal{H}]|\Phi_{\rm s}\rangle = Ef_{\rm s}(x) \tag{A.47}$$

場の演算子 $\phi(x)$ はエルミートであるが，正のエネルギーの粒子の運動の様子を表す波動関数 $f_{\rm s}(x)$ は複素関数である．

一方，その複素共役

$$f_{\rm s}^*(x) = \langle 0|\phi(x)|\Phi_{\rm s}\rangle^* = \langle\Phi_{\rm s}|\phi(x)|0\rangle \tag{A.48}$$

は負のエネルギー解となる．$\phi(x)$ は時空点 x^μ で s を消滅させるはたらきと s を生成するはたらきを兼ね備えている．

スカラー場が相互作用しているときには，ハミルトニアン (A.43) に相互作用項が加わる．たとえば $\lambda\phi^4$ 相互作用のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int d^3\vec{x}\left(c^2\pi^2(\vec{x}) + \phi(\vec{x})(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2})\phi(\vec{x}) + \frac{1}{4!}\frac{\lambda}{c^2\hbar^2}\phi^4(\vec{x})\right) \tag{A.49}$$

で与えられる．結合定数 λ は，量子系の基底状態として安定な真空 $|0\rangle$ が存在するとの要請，すなわちどのような状態 $|\Psi\rangle$ についても相互作用のエネルギー

の期待値が正（下に有界）

$$\lambda\langle\Psi|\phi^4(x)|\Psi\rangle > 0 \tag{A.50}$$

の要請により正の実数でなければならない．この相互作用により $\phi(x)$ の運動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) + \frac{1}{3!}\frac{\lambda}{c^2\hbar^2}\phi^3(x) = 0 \tag{A.51}$$

となる．

これまで，場に交換関係 (A.42) が設定された量子系を考察してきた．もし，場に反交換関係が設定されたらどうなるであろうか．ハミルトニアンの形 (A.49) から明白なように，$\mathcal{H}$ は 0 になってしまい，意味のある量子論を与えない．(A.49) が記述するスピン 0 のスカラー粒子はボーズ・アインシュタイン統計に従う．

複素場 $\phi(x)$ は 2 組の実数場 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ により

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(x) - i\phi_2(x)) \tag{A.52}$$

$$\pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1(x) - i\pi_2(x)) \tag{A.53}$$

と表すことができる．0 でない交換関係は

$$[\phi(\vec{x}), \pi^\dagger(\vec{y})] = [\phi^\dagger(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\hbar\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \tag{A.54}$$

となる．ハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = \int d^3\vec{x}\left(c^2\pi^\dagger(\vec{x})\pi(\vec{x}) + \phi^\dagger(\vec{x})\left(-\nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(\vec{x}) + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{c^2\hbar^2}\left(\phi^\dagger(\vec{x})\phi(\vec{x})\right)^2\right) \tag{A.55}$$

で与えると，$\phi(x)$ の運動方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\phi(x) + \frac{\lambda}{c^2\hbar^2}\left(\phi^\dagger(x)\phi(x)\right)\phi(x) = 0 \tag{A.56}$$

である．運動量演算子は

$$\vec{\mathcal{P}} = -\int d^3\vec{x}\ \left(\pi^\dagger\vec{\nabla}\phi(x) + \pi(x)\vec{\nabla}\phi^\dagger(x)\right) \tag{A.57}$$

となる．

$\phi(x)$ は粒子 s の消滅と反粒子 $\bar{\mathrm{s}}$ の生成，$\phi^\dagger(x)$ は $\bar{\mathrm{s}}$ の消滅と s の生成のはたらきをする．

A.4 自由ゲージ場

ゲージ場の量子論をハイゼンベルグ方程式 (A.8) にもとづいて表現するためには，かなりの道具立てが必要になる．その状況をゲージ結合定数が $g=0$ の自由ゲージ場について考察しよう．このときは，あらゆるゲージ場は古典的には真空中の電磁場と同じ形のマックスウェル方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu_{\mathrm{cl}}(x) - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu_{\mathrm{cl}}(x) = 0\ , \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{A.58}$$

に従う．場を実数場で表現すると，量子論における場の演算子 $A^\mu(x)$ はエルミートの条件

$$A^{\mu\dagger}(x) = A^\mu(x) \tag{A.59}$$

が課される．場が表す粒子を光子と呼ぼう．光子の反粒子は光子であり，それは真性中性粒子である．実スカラー場のときと同様に，$A^\mu(x)$ は光子を時空点 x^μ で消滅させる作用と光子の反粒子すなわち光子を x^μ で生成する作用を兼ね備えているはずである．

1 個の光子が正のエネルギーをもって運動している状態を $|\Phi_\gamma\rangle$ とする．真空 $|0\rangle$ と $|\Phi_\gamma\rangle$ との間の $A^\mu(x)$ の行列要素をこれまでと同じように

$$f^\mu(x) = \langle 0|A^\mu(x)|\Phi_\gamma\rangle \tag{A.60}$$

と定義する．$A^\mu(x)$ が古典場の運動方程式 (A.58) と同じ運動方程式

$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu(x) - \partial_\nu \partial^\mu A^\nu(x) = 0 \tag{A.61}$$

を満たしているとすると波動関数 $f^\mu(x)$ も

$$\partial_\nu \partial^\nu f^\mu(x) - \partial_\nu \partial^\mu f^\nu(x) = 0 \tag{A.62}$$

を満たすことになる．ここでディラック方程式やクライン・ゴルドン方程式では出会わなかった状況に出会うことになる．(A.62) は何らかの境界条件が課

されていても解を一意的には定めない．$f^\mu(x)$ が (A.62) を満たしていたら，任意関数 $\Lambda(x)$ による

$$f'^\mu(x) = f^\mu(x) - \partial^\mu \Lambda(x) \tag{A.63}$$

も解となる．これはゲージ対称性そのものであるから，ゲージ場の量子論が避けて通ることのできない状況である．$A^\mu(x)$ はゲージ場だから，光子の運動を表現する場としての役割に加えて，ゲージ群の「座標軸」の取り方の補正の役割も果たしている．その自由度は力学的な自由度ではないので運動方程式では定まらない．もし場の演算子 $A^\mu(x)$，それらの交換関係，およびハミルトニアンが問題なく構成されていて，ハイゼンベルグの運動方程式が実現されていたら，状態の運動は一意的に定まっており，その波動関数 $f^\mu(x)$ も不定性なしに決まっているはずである．そうならないということは，ゲージ場の量子論の表現には何らかの余分の手立てが必要であることを意味している．

1つの方法は演算子としての場 $A^\mu(x)$ に条件を課して不定性を取り除くことである．たとえば場の空間成分 $\vec{A}(x)$ に条件

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0 \tag{A.64}$$

を課す．この条件はクーロンゲージと呼ばれる．この条件を満たしていない $\vec{A}(x)$ はゲージ変換

$$\vec{A}(x) \to \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \vec{\nabla}\Lambda(x) \tag{A.65}$$

$$\Lambda(x) = \int d^3\vec{y}\, G(\vec{x}-\vec{y})\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(y) \tag{A.66}$$

$$\nabla^2 G(\vec{x}-\vec{y}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ ,\quad G(\vec{x}-\vec{y}) \equiv -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \tag{A.67}$$

によって，必ず変換された場が $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'(x) = 0$ を満たすようにできる．マックスウェル方程式 (A.61) の $\mu = 0, \mu = i(= 1, 2, 3)$ 成分を書き下すと

$$-\nabla^2 A^0 - \partial^0 \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \tag{A.68}$$

$$(\partial_0\partial^0 - \nabla^2)A^i + \nabla^i(\partial_0 A^0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = 0 \tag{A.69}$$

である．クーロンゲージ (A.64) のもとで (A.68) は $\nabla^2 A^0(x) = 0$ であるが，全空間でこれを満たす解は $A^0(x) =$ [定数] なので $A^0(x)$ の力学的自由度はなくなる．さらに (A.69) の左辺の第2項も消える．

したがって，クーロンゲージでの光子の自由運動は方程式

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{A}(x) = 0 \ , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(x) = 0 \tag{A.70}$$

によって定まる．光子の波動関数 $\vec{f}(x)$ も同じ方程式を満たす．光子が 4 元運動量 $\mathcal{P}^\mu$ の固有状態であれば

$$\vec{f}(x) = \vec{\epsilon}(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} \ , \quad p_\mu p^\mu = 0 \ , \ \ \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{p}) = 0 \tag{A.71}$$

である．すなわち光子は質量が 0 であり，空間回転のもとでベクトルとして変換するスピンが s=1 の粒子である．偏極ベクトル $\vec{\epsilon}(\vec{p})$ は $\vec{p}$ と直交する横波だから，線形独立な状態は 2 つである．スピン行列は 3 次元ベクトル $\vec{\epsilon}(\vec{p})$ の表現では

$$S_x = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ S_y = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ S_z = i\hbar \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.72}$$

と表される．スピン状態を光子の進行方向を z 軸として表すと，$S_z = \pm\hbar$ の横波状態 $\vec{\epsilon}_\pm \equiv (1/\sqrt{2}, \pm i/\sqrt{2}, 0)$ のみであり $S_z = 0$ の縦波状態 $\vec{\epsilon}_0 \equiv (0,0,1)$ が存在しないことを意味している．

これまで光子の自由運動を考察してきたが，荷電粒子と相互作用している系についてもクーロンゲージで量子系の運動を取り扱うことは可能である．電磁場の運動方程式は

$$-\nabla^2 A^0(x) = \rho(x) \tag{A.73}$$

$$(\partial_0 \partial^0 - \nabla^2) A^i(x) + \nabla^i \partial_0 A^0(x) = \frac{1}{c} j^i(x) \tag{A.74}$$

となる．$A^0(x)$ は今度は定数ではなく，物質場の電荷密度 $\rho(x)$ で表される．したがって

$$A^0(t, \vec{x}) = -\int d^3\vec{y} \ G(\vec{x} - \vec{y}) \rho(t, \vec{y}) \tag{A.75}$$

$$(\partial_0 \partial^0 - \nabla^2) A^i(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{y} \ \nabla^i G(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\partial \rho(t, \vec{y})}{\partial t} + \frac{1}{c} j^i(t, \vec{x}) \tag{A.76}$$

である．$A^\mu(x)$ は物質場たとえば電子の運動方程式の中に相互作用項として

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu + \frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu(x) - mc\right)\psi(x) = 0 \tag{A.77}$$

と現れる．(A.75) の $A^0(t,\vec{x})$ は時刻 t における $\vec{y}(\neq \vec{x})$ の座標点の電荷密度によって定まっているので，同時刻における遠方の変化が瞬時に電子の運動に影響するように見える．すなわち相対性理論の基本原理である因果律が破れるのではないかと思われる．しかし $A^0(t,\vec{x})$ が変化すると，(A.76) により $A^i(t,\vec{x})$ も座標点 $\vec{y}$ の $\rho(t,\vec{y})$ の変化の影響を瞬時に受ける．この 2 つの効果が合わさることによって，$\rho(t,\vec{y})$ の変化が座標点 $\vec{x}$ の電子の運動に与える影響は，観測可能な物理量，たとえば散乱振幅などについては因果律が満たされる．しかし電子の状態の位相など，観測不可能な量には因果律を満たさない影響が現れる．そもそもゲージ理論は電子の位相をどのように変えても運動法則が不変な力学系であった．この因果律の破れは，ゲージ不変性をクーロンゲージ (A.64) の条件によって固定したために支払わなければならなくなった代償である．

クーロンゲージはゲージ粒子の物理的自由度を理解するには大変すぐれているが，見て明らかなように，その条件式 (A.64) は相対論的にバランスのとれた形ではない．光子の粒子としての力学的自由度は横波スピンの自由度 2 だけであるが，それを表現する場 $A^\mu(x)$ は 4 成分なので，その運動を相対論的にバランスのとれた形で表現しようとすると，必然的に物理的でない余分の自由度をも取り扱うことになる．

A.5 電子と電磁場の相互作用

ゲージ場の量子論の一般的な取り扱いに入る前に，ここで，相互作用項を含んだ場の運動方程式が物理過程として何を表しているのかを，電子と電磁場の相互作用を例にとって概観しておこう．ここでは，電磁場は何らかの適切な取り扱いによって，量子論としての運動が定まっていると仮定しておく．電磁場 $A_\mu(x)$ と相互作用する電子の場 $\psi(x)$ の運動は運動方程式

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi(x) = -\frac{e}{c}\gamma^\mu A_\mu(x)\psi(x) \tag{A.78}$$

によって定まる．

時刻 $t = T_\mathrm{i} < 0$ における始状態を $|\Psi_\mathrm{i}(T_\mathrm{i})\rangle$ とする．この状態がシュレディンガー方程式 (A.1) に従って $t = 0$ まで時間発展した状態を $|\Psi_\mathrm{i}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}T_\mathrm{i}}|\Psi_\mathrm{i}(T_\mathrm{i})\rangle$ と表そう．同様に $t = T_\mathrm{f} > 0$ の終状態 $|\Psi_\mathrm{f}(T_\mathrm{f})\rangle$ を $t = 0$ まで引き戻した状態を $|\Psi_\mathrm{f}\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}T_\mathrm{f}}|\Psi_\mathrm{f}(T_\mathrm{f})\rangle$ と表す．これからは $T_\mathrm{i} \to -\infty$, $T_\mathrm{f} \to +\infty$ の極限を考えることにする．$|\Psi_\mathrm{i}\rangle$ と $|\Psi_\mathrm{f}\rangle$ との間で $\psi(x)$ および $A_\mu(x)\psi(x)$ の行列要素を

$$
\begin{aligned}
v(x) &\equiv \langle\Psi_\mathrm{f}|\psi(x)|\Psi_\mathrm{i}\rangle \\
&= \langle\Psi_\mathrm{f}(T_\mathrm{f})|e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(T_\mathrm{f}-t)}\psi(\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(t-T_\mathrm{i})}|\Psi_\mathrm{i}(T_\mathrm{i})\rangle
\end{aligned} \tag{A.79}
$$

$$
\begin{aligned}
w_\mu(x) &\equiv \langle\Psi_\mathrm{f}|A_\mu(x)\psi(x)|\Psi_\mathrm{i}\rangle \\
&= \langle\Psi_\mathrm{f}(T_\mathrm{f})|e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(T_\mathrm{f}-t)}A_\mu(\vec{x})\psi(\vec{x})e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(t-T_\mathrm{i})}|\Psi_\mathrm{i}(T_\mathrm{i})\rangle
\end{aligned} \tag{A.80}
$$

で定義する．運動方程式 (A.78) はこれら 2 つの行列要素を関係式

$$
\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)v(x) = -\frac{e}{c}\gamma^\mu w_\mu(x) \tag{A.81}
$$

で結び付けている．

微分方程式 (A.81) の解 $v(x)$ は

$$
\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)S_F(x-y) = \delta^4(x-y)\ , \qquad \delta^4(x) \equiv \delta(x^0)\delta^3(\vec{x}) \tag{A.82}
$$

を満たす 4 行 4 列のグリーン関数 $S_F(x-y)$ を用いて，形式的に

$$
v(x) = v_0(x) + \int d^4y S_F(x-y)\frac{-e}{c}\gamma^\mu w_\mu(y)\ , \qquad d^4y \equiv dy^0 d^3\vec{y} \tag{A.83}
$$

と表すことができる．$v_0(x)$ は自由電子のディラック方程式

$$
\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)v_0(x) = 0 \tag{A.84}
$$

を満たす解である．

(A.79) の場 $\psi(x)$ は電子を消滅させるはたらきと，陽電子を生成するはたらきをもっている．(A.83) の $v_0(x)$ は自由運動のディラック方程式を満たしているので，それは始状態 $|\Psi_\mathrm{i}(T_\mathrm{i})\rangle$ の中の電子 1 個が全く相互作用をせずに時空点 x^μ まで自由運動をしてきて，$\psi(x)$ によって消滅させられた振幅（正エネルギー解），および x^μ で生成された陽電子が，相互作用をすることなく終状態 $|\Psi_\mathrm{f}(T_\mathrm{f})\rangle$ に到った振幅（負エネルギー解）を与えている．

(A.83) の第 2 項を考察しよう．(A.82) により $x^\mu \neq y^\mu$ では $(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)S_F(x-y) = 0$ だから，$S_F(x-y)$ は x^μ と y^μ の間の電子あるいは陽電子の自由運動を表している．したがって $x^0 > y^0$ の領域の積分は，時空点 y^μ で光子と相互作用をした電子が，その後相互作用することなしに x^μ までたどり着き $\psi(x)$ によって消滅させられた振幅，一方 $y^0 > x^0$ の領域の積分は，$\psi(x)$ によって x^μ に生成された陽電子が相互作用することなく y^μ まで運動し，そこで初めて光子と相互作用をする振幅を表していると理解することができる（始状態と終状態を設定したときに $|T_{\rm i,f}| \to \infty$ の極限をとったのは，この描像をあらゆる x^μ について成り立たせるためである）．$S_F(x-y)$ はこれら電子と陽電子の運動を忠実に実現するグリーン関数でなければならない．$S_F(x-y)$ は $x^0 > y^0$ のときには，y^μ から x^μ まで正のエネルギーをもった電子が自由運動する振幅を，$y^0 > x^0$ のときには，x^μ から y^μ まで陽電子が正のエネルギーをもって自由運動する振幅を与えなければならない．

これらの要請を満たす $S_F(x-y)$ は，自由運動のディラック方程式 (A.12) に従う自由電子の場 $\psi(x)$ によって

$$i\hbar S_F^{ij}(x-y) = \theta(x^0-y^0)\langle 0|\psi^i(x)\bar{\psi}^j(y)|0\rangle - \theta(y^0-x^0)\langle 0|\bar{\psi}^j(y)\psi^i(x)|0\rangle \tag{A.85}$$

と表すことができる．ここに $\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$ は $\psi(x)$ のディラック共役，また $\theta(x^0) = 1\ (x^0 > 0)$, $\theta(x^0) = 0\ (x^0 < 0)$ はヘビサイドの θ 関数である．第 1 項は y^μ で生成された電子が x^μ まで運動する振幅を，第 2 項は x^μ で生成された陽電子が y^μ まで運動する振幅を与えている．(A.85) の $S_F(x-y)$ が (A.82) を満たすことは以下のように確かめることができる．(A.85) に $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc$ を作用させたとき，$\psi(x)$ に直接かかると 0 だから，x^0 微分が θ にかかったものだけが残る．デルタ関数の公式

$$\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x) \tag{A.86}$$

により

$$\begin{aligned}
&((i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc)S_F(x-y))^{ij} \\
&= \delta(x^0-y^0)\langle 0|\left((\gamma^0\psi(x))^i\bar{\psi}^j(y) + \bar{\psi}^j(y)(\gamma^0\psi(x))^i\right)|0\rangle \\
&= \delta(x^0-y^0)\sum_{i'j'=1}^{4}(\gamma^0)^{ii'}(\gamma^0)^{j'j}\langle 0|\left(\psi^{i'}(t,\vec{x})\psi^{j'\dagger}(t,\vec{y})\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\psi^{j'\dagger}(t,\vec{y})\psi^{i'}(t,\vec{x})\Big)|0\rangle \\
&= \delta(x^0-y^0)\sum_{i'j'=1}^{4}(\gamma^0)^{ii'}(\gamma^0)^{j'j}\langle 0|\left(\delta^{i'j'}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\right)|0\rangle \\
&= \delta^{ij}\delta^4(x-y) \qquad \text{(A.87)}
\end{aligned}
$$

となり (A.82) が実現されている．(A.87) の 3 番目の等号において場 $\psi(t,\vec{x})$, $\psi^\dagger(t,\vec{x})$ が $t=0$ の反交換関係 (A.35) と同じ反交換関係を満たすことを用いた．$S_F(x-y)$ はファインマンのプロパゲーターと呼ばれる．

(A.79), (A.80) の行列要素 $v(x), w_\mu(x)$ は，相互作用の結合定数 e の大変複雑な関数である．それらは電子や陽電子が光子と何回相互作用したかによって e のベキで展開できるが，同じ e のベキの項でもいろいろな過程が含まれている．運動方程式 (A.78) が相互作用の素過程として，何を意味しているのかを見るために，$v(x), w_\mu(x)$ の e についての最低次の項に注目しよう．$v_0(x)$ は興味がないので省略すると，$v(x)$ の最低次は (A.83) により e の 1 次である．したがって $w_\mu(x)$ は 0 次だけを残せばよい．(A.80) の行列要素は自由粒子の行列要素になる．

まず最初に，始状態を電子と光子が 1 個ずつ運動している状態 $|\Psi_\mathrm{i}\rangle = |\Phi_{\mathrm{e}\gamma}\rangle$ に，終状態を真空 $|\Psi_\mathrm{f}\rangle = |0\rangle$ にとろう．始状態のそれぞれの正のエネルギーの波動関数を

$$
u(x) = \langle 0|\psi(x)|\Phi_\mathrm{e}\rangle\ ,\quad f_\mu(x) = \langle 0|A_\mu(x)|\Phi_\gamma\rangle \qquad \text{(A.88)}
$$

とすると，$w_\mu(x)$ は

$$
w_\mu(x) = f_\mu(x)u(x) \qquad \text{(A.89)}
$$

と表すことができる．したがって (A.81) は

$$
\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)v(x) = -\frac{e}{c}\gamma^\mu f_\mu(x)u(x) \qquad \text{(A.90)}
$$

となる．解 $v(x)$ は

$$
v(x) = \int d^4y S_F(x-y)\frac{-e}{c}\gamma^\mu f_\mu(y)u(y) \qquad \text{(A.91)}
$$

と表すことができる．

(A.91) の意味は以下のとおりである．$f_\mu(y)u(y)$ は始状態の電子と光子が運動して，時空点 y^μ にたどり着く確率振幅である．それに相互作用の結合定数

$-e$ がかかったものが波源となって $v(x)$ の波が作られ，それが時空点 x^μ まで運動している．$v(x)$ が正エネルギー解 $(x^0 > y^0)$ のときには，電子が y^μ で光子を吸収して x^μ に到った素過程，$v(x)$ が負エネルギー解 $(y^0 > x^0)$ のときは，x^μ で生成された陽電子が y^μ まで運動し，そこで電子および光子とともに消滅する素過程が $-e$ の強さで起ることを意味している．

次に，始状態の光子を終状態に移した場合を考察しよう．始状態は電子 1 個の状態 $|\Psi_{\rm i}\rangle = |\Phi_{\rm e}\rangle$，終状態は光子 1 個の状態 $|\Psi_{\rm f}\rangle = |\Phi_\gamma\rangle$ とする．光子の波動関数

$$f_\mu^*(x) = \langle\Phi_\gamma|A_\mu(x)|0\rangle \tag{A.92}$$

は負のエネルギー解 $f_\mu^*(x)$ になる．したがって

$$w_\mu(x) = f_\mu^*(x)u(x) \tag{A.93}$$

である．(A.81) は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)v(x) = -\frac{e}{c}\gamma^\mu f_\mu^*(x)u(x) \tag{A.94}$$

となり，その解は

$$v(x) = \int d^4y S_F(x-y)\frac{-e}{c}\gamma^\mu f_\mu^*(y)u(y) \tag{A.95}$$

である．この式は $v(x)$ が正エネルギー解であれば，電子が y^μ で光子を放出する素過程，$v(x)$ が負エネルギー解のときは電子と陽電子が y^μ で対消滅して光子 1 個になる素過程が $-e$ の強さで起ることを意味している．

今度は，光子は始状態に残し，終状態に陽電子が 1 個いる場合を考察しよう．$|\Psi_{\rm i}\rangle = |\Phi_\gamma\rangle$, $|\Psi_{\rm f}\rangle = |\Phi_{\bar{\rm e}}\rangle$ である．陽電子の波動関数は (A.25) の負エネルギー解

$$u^{(-)}(x) = \langle\Phi_{\bar{\rm e}}|\psi(x)|0\rangle \tag{A.96}$$

で表される．したがって

$$w_\mu(x) = f_\mu(x)u^{(-)}(x) \tag{A.97}$$

である．(A.81) およびその解は

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)v(x) = -\frac{e}{c}\gamma^\mu f_\mu(x)u^{(-)}(x) \tag{A.98}$$

$$v(x) = \int d^4y S_F(x-y) \frac{-e}{c} \gamma^\mu f_\mu(y) u^{(-)}(y) \tag{A.99}$$

となる．$v(x)$ が正エネルギー解のときには，y^μ で光子から電子と陽電子が対生成される素過程を，$v(x)$ が負エネルギー解のときは陽電子が y^μ で光子を吸収する素過程を表している．

始状態を真空 $|\Psi_\mathrm{i}\rangle = |0\rangle$ とし，終状態を陽電子 1 個と光子 1 個の状態 $|\Psi_\mathrm{f}\rangle = |\Phi_{\bar{\mathrm{e}}\gamma}\rangle$ とすると

$$w_\mu(x) = f_\mu{}^*(x) u^{(-)}(x) \tag{A.100}$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right) v(x) = -\frac{e}{c} \gamma^\mu f_\mu{}^*(x) u^{(-)}(x) \tag{A.101}$$

$$v(x) = \int d^4y S_F(x-y) \frac{-e}{c} \gamma^\mu f_\mu{}^*(y) u^{(-)}(y) \tag{A.102}$$

となる．$v(x)$ が正エネルギー解のときには，この式は真空から電子，陽電子および光子が生成される素過程を，$v(x)$ が負エネルギー解のときには陽電子が光子を放出する素過程を表している．

これで場の運動方程式 (A.78) が意味することがすべて明らかになった．右辺の $\psi(x)$ が表す粒子（電子）が，$A_\mu(x)$ が表す粒子（光子）を時空点 x^μ で吸収あるいは放出して，左辺の $\psi(x)$ が表す粒子に遷移する素過程の確率振幅が結合定数 $-e$ に比例して定まっている．後は，粒子の運動を逆転させ反粒子に置き換えることによって，すべての素過程が求まる．

クォークやレプトンとゲージ場 $G_\mu(x)$ との相互作用は，(A.78) の $eA_\mu(x)$ を $gG_\mu(x)$ で置き換えた運動方程式で表されるので，それが与える素過程は光子との相互作用の素過程と全く同じである．一般に，場の運動方程式を，場 $\psi(x)$ について 1 次の項を左辺に置き，2 次以上の相互作用項を右辺に置いて書き下したとき，右辺の $\psi(x)$ を正エネルギー解にとると，$\psi(x)$ が表す粒子が x^μ に向かって運動してくることを表し，負エネルギー解にとると x^μ から反粒子が飛び去ることを表している．左辺の場 $\psi(x)$ を正のエネルギー解にとると，その粒子が x^μ から飛び去り，負エネルギー解にとると反粒子が x^μ まで運動してくることを表している．

A.6 ゲージ場の量子論

群 $SU(N)$ のゲージ場の量子論の表現の方法を与える．クォークやレプトンなどの物質場との相互作用は，物質場の運動方程式によって定まっているので，ここでは物質場はすべて省略し，ゲージ場のみの量子系を考察する．ここではゲージ結合定数 $g/c\hbar$ を g と表すことにする．群 $U(1)$ のゲージ理論（電磁相互作用など）は，以下の表式で群の構造定数を $f^{abc}=0$ とおくことによって得られる．

$SU(N)$ の共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + igG_\mu(x) \ , \qquad \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{A.103}$$

で与えられる．ゲージ場 $G_\mu(x)$ は N 行 N 列の $SU(N)$ の基底行列

$$T^{a\dagger} = T^a \ , \quad \mathrm{tr}\ T^a = 0 \ , \quad [T^a, T^b] = i\sum_{c=1}^{d_G} f^{abc}T^c \tag{A.104}$$

により

$$G_\mu = \sum_{a=1}^{d_G} T^a G_\mu^a(x) \tag{A.105}$$

と表される．$G_\mu^{a\dagger} = G_\mu^a$ である．今後，リー代数の添字 a などが 1 つの項に同時に 2 度現れたときには，$a=1,\cdots,d_G$ の和がとられているものとして Σ を省略する．

ゲージ変換は，$SU(N)$ の行列 $U(x)$ $(U^\dagger U = UU^\dagger = I)$ により，

$$G_\mu \longrightarrow G'_\mu = UG_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}\partial_\mu U\ U^{-1} \tag{A.106}$$

で与えられる．共変微分はゲージ変換 (A.106) のもとで

$$D_\mu \to D'_\mu = UD_\mu U^{-1} \tag{A.107}$$

と変換する．$G_{\mu\nu}(x)$ を

$$G_{\mu\nu} = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] \tag{A.108}$$

で定義すると，ゲージ変換のもとで $G_{\mu\nu}(x)$ は

$$G_{\mu\nu} \longrightarrow G'_{\mu\nu} = UG_{\mu\nu}U^{-1} \tag{A.109}$$

と変換する．共変微分 (A.103) の表式を代入すると

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu G_\nu - \partial_\nu G_\mu + ig[G_\mu, G_\nu] \tag{A.110}$$

と表される．リー代数の基底 T^a での成分で表すと

$$G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - gf^{abc}G^b_\mu G^c_\nu \tag{A.111}$$

となる．

ゲージ対称性をもったゲージ場 $G_\mu(x)$ の運動方程式は，共変微分 (A.103) を用いて

$$[D_\nu, G^{\nu\mu}] = \partial_\nu G^{\nu\mu} + ig[G_\nu, G^{\nu\mu}] = 0 \tag{A.112}$$

で与えられると推測される．この運動方程式は電磁場のマックスウェル方程式 (A.58) を $SU(N)$ に拡張したものである．ゲージ変換のもとで

$$[D_\nu, G^{\nu\mu}] \to [D'_\nu, G'^{\nu\mu}] = U[D_\nu, G^{\nu\mu}]U^{-1} \tag{A.113}$$

であるから，(A.112) が成り立つとき，ゲージ変換した場についても

$$[D'_\nu, G'^{\nu\mu}] = 0 \tag{A.114}$$

が成り立ち，ゲージ対称性が実現される．(A.112) を成分で表すと

$$[D_\nu G^{\nu\mu}]^a \equiv \partial_\nu G^{a\nu\mu} - gf^{abc}G^b_\nu G^{c\nu\mu} = 0 \tag{A.115}$$

である．

場の量子論において，運動方程式を見通し良く取り扱うには，変分原理にもとづく作用積分を取り扱うのが有用（不可欠）である．ゲージ場の 4 次元積分量を

$$\mathcal{I}_g = -\frac{1}{2}\int d^4x \ \mathrm{tr}[G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}] = -\frac{1}{4}\int d^4x \ G^{a\mu\nu}G^a_{\mu\nu} \tag{A.116}$$

と定義しよう．これはゲージ場の作用積分と呼ばれる．G^a_μ を任意の微少量 δG^a_μ だけ変化させたときの $\mathcal{I}_g$ の変化量 $\delta\mathcal{I}_g$ は適当に部分積分すると

$$\delta\mathcal{I}_g = -\frac{1}{2}\int d^4x \ G^{a\mu\nu}\delta G^a_{\mu\nu} = \int d^4x \ [D_\nu G^{\nu\mu}]^a \delta G^a_\mu \tag{A.117}$$

となる．したがってゲージ場の運動方程式 (A.115) は作用積分 $\mathcal{I}_g$ の停留点 $\delta\mathcal{I}_g = 0$ を定める方程式になっている．運動方程式のゲージ対称性は $\mathcal{I}_g$ がゲージ変換 (A.106) のもとで不変であることによって実現されている．

量子論に進もう．ゲージ場の演算子 $G^a_\mu(x)$ の運動方程式が (A.115) だとすると，それはA.4で考察した自由ゲージ場のときと同様に，ゲージ場の運動を一意的には定めない．量子論としてゲージ場の力学系を記述するには，ゲージ場 $G^a_\mu(x)$ に何らかの条件を課して不定性を除去し，運動方程式 (A.115) が運動を完全に決定するようにするか，あるいは，それと等価な形で運動方程式をゲージ変換のもとで不変でないものに置き換えなければならない．

ゲージ場の量子系の一般的な取り扱いが確立する契機となったのは，ベッキ，ルーエ，ストラおよび，独立にトゥティンによって発見（1975年）されたBRST対称性と呼ばれる大変奇妙な対称性である．その対称性の変換パラメターはグラスマン数と呼ばれるフェルミオン的な性質

$$\lambda^2 = \xi^2 = 0\ ,\quad \lambda\xi = -\xi\lambda\ ,\ \cdots \tag{A.118}$$

$$\lambda^\dagger = \lambda\ ,\quad \xi^\dagger = \xi\ ,\ \cdots \tag{A.119}$$

を満たす「実数」である．変換に登場する場はスピンは0だがフェルミ・ディラック統計に従うゴースト（幽霊）スカラー場 $C(x)$ と反ゴースト場 $\bar{C}(x)$，およびボーズ・アインシュタイン統計に従うスカラー場 $B(x)$

$$C(x) = T^a C^a(x)\ ,\quad \bar{C}(x) = T^a \bar{C}^a(x)\ ,\quad B(x) = T^a B^a(x) \tag{A.120}$$

である．これらはゲージ場と同様に，すべてエルミート $C^{a\dagger} = C^a, \bar{C}^{a\dagger} = \bar{C}^a, B^{a\dagger} = B^a$ である．$C^a(x)$ および $\bar{C}^a(x)$ はファデーエフ・ポポフ（FP）ゴーストと呼ばれ，それらは $\lambda, \xi, \cdots$ と反可換であり，フェルミ・ディラック統計

$$\{C^a, C^b\} = \{\bar{C}^a, \bar{C}^b\} = \{C^a, \bar{C}^b\} = 0 \tag{A.121}$$

に従う．ボーズ場 $B^a(x)$ は中西・ロートラップ場と呼ばれ，$\lambda, \xi, C^a, \bar{C}^a$ とは可換である．

まず，グラスマンパラメター λ を用いてゴースト場 C の行列関数

$$U(C, \lambda) \equiv e^{\lambda C(x)} = 1 + \lambda C(x) \tag{A.122}$$

を定義しよう．$\lambda^2 = 0$ だから λ の展開は 1 次までになる．このエルミート共役は

$$U^\dagger(C,\lambda) = 1 + (\lambda C(x))^\dagger = 1 + C(x)\lambda = 1 - \lambda C(x) = e^{-\lambda C(x)} = U^{-1}(C,\lambda) \tag{A.123}$$

だから $U(C,\lambda)$ は形式的には $SU(N)$ の行列である．ここでパラメター λ による C の BRST 変換を

$$C \to C^\lambda \equiv U(C,\lambda)C = C + \lambda C^2 \tag{A.124}$$

で定義する．この変換で $C(x)$ のエルミート性が保たれていること，すなわち $(C^\lambda(x))^\dagger = C^\lambda(x)$ に注意しておく．(A.124) の右辺の C をさらにパラメター ξ で変換したものを

$$(C^\lambda)^\xi \equiv U(C^\xi,\lambda)C^\xi = U(C^\xi,\lambda)U(C,\xi)C \tag{A.125}$$

と表そう．右辺に現れた 2 つの行列 U の積は，ξ, C の反可換性に注意すると

$$U(C^\xi,\lambda)U(C,\xi) = \Big(1 + \lambda(C + \xi C^2)\Big)(1 + \xi C) = 1 + (\lambda + \xi)C = U(C, \lambda + \xi) \tag{A.126}$$

となる．したがって

$$(C^\lambda)^\xi = C^{\lambda+\xi} \tag{A.127}$$

が成り立つ．次に $\bar{C}(x)$ と $B(x)$ の BRST 変換を

$$\bar{C} \to \bar{C}^\lambda \equiv \bar{C} + \lambda \frac{1}{g} B\ , \quad B \to B^\lambda \equiv B \tag{A.128}$$

で定義すると，これらにも明らかに

$$(\bar{C}^\lambda)^\xi = \bar{C}^{\lambda+\xi}\ , \quad (B^\lambda)^\xi = B^{\lambda+\xi} \tag{A.129}$$

が成り立つ．

(A.122) の行列 $U(C,\lambda)$ が $SU(N)$ の行列であることに着目し，ゲージ場 $G_\mu(x)$ の BRST 変換を $SU(N)$ のゲージ変換と同形に

$$G_\mu \to G_\mu^\lambda \equiv U(C,\lambda)G_\mu U^{-1}(C,\lambda) + \frac{i}{g}\partial_\mu U(C,\lambda)U^{-1}(C,\lambda)$$

$$= G_\mu + \lambda \frac{i}{g}[D_\mu, C] \tag{A.130}$$

で定義する．$G_\mu(x)$ についても

$$(G_\mu^\lambda)^\xi \equiv U(C^\xi, \lambda) G_\mu^\xi U^{-1}(C^\xi, \lambda) + \frac{i}{g}\partial_\mu U(C^\xi, \lambda) U^{-1}(C^\xi, \lambda) = G_\mu^{\lambda+\xi} \tag{A.131}$$

が成り立つことが，等式 (A.126) を用いると容易に示せる．

$SU(N)$ の基底行列 T^a で展開した成分場 $C^a, \bar{C}^a, B^a, G_\mu^a$ の BRST 変換は，基底行列 T^a の交換関係 (A.104) および $C^2 = T^b T^c C^b C^c = \frac{1}{2}[T^b, T^c] C^b C^c = \frac{i}{2} T^a f^{abc} C^b C^c$ に注意すると

$$C^{\lambda a} = C^a + \lambda \frac{i}{2} f^{abc} C^b C^c \tag{A.132}$$

$$\bar{C}^{\lambda a} = \bar{C}^a + \lambda \frac{1}{g} B^a \tag{A.133}$$

$$B^{\lambda a} = B^a \tag{A.134}$$

$$G_\mu^{\lambda a} = G_\mu^a + \lambda \frac{i}{g}\left(\partial_\mu C^a - g f^{abc} G_\mu^b C^c\right) \tag{A.135}$$

と求まる．

すべての場 $\Phi = \{C, \bar{C}, B, G_\mu\}$ の BRST 変換は $(\Phi^\lambda)^\xi = \Phi^{\lambda+\xi}$ を満たすが，さらに Φ の任意の汎関数 $\mathcal{F}[\Phi]$ についても

$$((\mathcal{F}[\Phi])^\lambda)^\xi = (\mathcal{F}[\Phi^\lambda])^\xi = \mathcal{F}[(\Phi^\lambda)^\xi] = \mathcal{F}[\Phi^{\lambda+\xi}] = (\mathcal{F}[\Phi])^{\lambda+\xi} \tag{A.136}$$

が実現されている．$\mathcal{F}$ の BRST 変換を

$$\mathcal{F}^\lambda = \mathcal{F} + \lambda \mathcal{G} \tag{A.137}$$

と表すと，$(\mathcal{F}^\lambda)^\xi = \mathcal{F}^{\lambda+\xi}$ の左右両辺はそれぞれ

$$(\mathcal{F}^\lambda)^\xi = \mathcal{F}^\xi + \lambda \mathcal{G}^\xi = \mathcal{F} + \xi \mathcal{G} + \lambda \mathcal{G}^\xi \tag{A.138}$$

$$\mathcal{F}^{\lambda+\xi} = \mathcal{F} + (\lambda + \xi)\mathcal{G} \tag{A.139}$$

である．したがって $\mathcal{F}$ の BRST 変換 (A.137) の変化量 $\lambda\mathcal{G}$ は BRST 変換のもとで不変

$$\lambda \mathcal{G}^\xi = \lambda \mathcal{G} \tag{A.140}$$

である．このような性質をもった変換はベキ零変換と呼ばれる．

すべての場の演算子 Φ を Φ^λ に変換するユニタリー変換の演算子を

$$\Phi^\lambda = e^{\lambda\mathcal{Q}}\Phi e^{-\lambda\mathcal{Q}} = \Phi + [\lambda\mathcal{Q}, \Phi] \tag{A.141}$$

で定義しよう．$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^\dagger$ は $\lambda, \xi, \cdots$ と反可換なフェルミオン的な演算子で BRST 電荷と呼ばれる．(A.140) により，Φ の BRST 変換の変化量 $[\lambda\mathcal{Q}, \Phi]$ をさらに BRST 変換したときの変化量が 0 であることから

$$\begin{aligned} 0 &= [\xi\mathcal{Q}, [\lambda\mathcal{Q}, \Phi]] \\ &= \lambda\xi\mathcal{Q}^2\Phi + \mathcal{Q}\xi\Phi\lambda\mathcal{Q} + \mathcal{Q}\lambda\Phi\xi\mathcal{Q} - \lambda\xi\Phi\mathcal{Q}^2 \\ &= \lambda\xi[\mathcal{Q}^2, \Phi] \end{aligned} \tag{A.142}$$

となる（Φ がボソンでもフェルミオンでも $\xi\Phi\lambda = -\lambda\Phi\xi$ に注意）．これがすべての Φ について成り立つので $\mathcal{Q}$ はベキ零演算子，すなわち

$$\mathcal{Q}^2 = 0 \tag{A.143}$$

となる（$\mathcal{Q}^2 = [\text{定数}]$ の可能性がないことは以下で明らかになる）．

$\Phi = \{C, \bar{C}, B, G_\mu\}$ の間には BRST 変換と矛盾しない変換がもう 1 つ潜んでいる．実数パラメター ρ によって C と $\bar{C}$ のスケール変換を

$$C \to C_\rho \equiv e^\rho C\ , \quad \bar{C} \to \bar{C}_\rho \equiv e^{-\rho}\bar{C}\ , \quad B \to B_\rho \equiv B\ , \quad G_\mu \to G_{\mu_\rho} \equiv G_\mu \tag{A.144}$$

によって定義しよう．λ の BRST 変換と ρ のスケール変換を続けて行うと

$$(C^\lambda)_\rho \equiv C_\rho + \lambda C_\rho^2 = e^\rho(C + e^\rho\lambda C^2) \tag{A.145}$$

$$(C_\rho)^\lambda \equiv e^\rho C^\lambda = e^\rho(C + \lambda C^2) \tag{A.146}$$

となるので，これらの変換の間には

$$(C^\lambda)_\rho = (C_\rho)^{\lambda_\rho}\ , \qquad \lambda_\rho \equiv e^\rho\lambda \tag{A.147}$$

が成り立つ．ほかの場についても同様で，すべての場 Φ について

$$(\Phi^\lambda)_\rho = (\Phi_\rho)^{\lambda_\rho} \tag{A.148}$$

が成り立つ.

ゴースト数演算子と呼ばれるボソン的な演算子 $\mathcal{N} = -\mathcal{N}^\dagger$ を

$$[\mathcal{N}, C] = C\ , \quad [\mathcal{N}, \bar{C}] = -\bar{C}\ , \quad [\mathcal{N}, B] = [\mathcal{N}, G_\mu] = 0 \tag{A.149}$$

で定義しよう. $[\mathcal{N}, \bar{C}^n C^m] = (m-n)\bar{C}^n C^m$ (m, n は負でない整数) となるので $\mathcal{N}$ は [C の数] − [$\bar{C}$の数] ≡ [ゴースト数] を数え上げる演算子である. Φ を Φ_ρ に変換するユニタリー変換は公式 (6.82) を思い出すと

$$\Phi_\rho = e^{\rho\mathcal{N}} \Phi e^{-\rho\mathcal{N}} \tag{A.150}$$

と表される. λ と ρ の変換の性質 (A.148)

$$e^{\rho\mathcal{N}} e^{\lambda\mathcal{Q}} \Phi e^{-\lambda\mathcal{Q}} e^{-\rho\mathcal{N}} = e^{\lambda_\rho\mathcal{Q}} e^{\rho\mathcal{N}} \Phi e^{-\rho\mathcal{N}} e^{-\lambda_\rho\mathcal{Q}} \tag{A.151}$$

がすべての Φ について成り立つので $e^{\rho\mathcal{N}} e^{\lambda\mathcal{Q}} e^{-\rho\mathcal{N}} = e^{\lambda_\rho\mathcal{Q}}$, したがって $e^{\rho\mathcal{N}} \mathcal{Q} e^{-\rho\mathcal{N}} = e^\rho \mathcal{Q}$ が導かれ, これから $\mathcal{N}, \mathcal{Q}$ の交換関係

$$[\mathcal{N}, \mathcal{Q}] = \mathcal{Q} \tag{A.152}$$

が求まる. これにより $[\mathcal{N}, \mathcal{Q}^2] = 2\mathcal{Q}^2$ となるので $\mathcal{Q}^2$ は定数ではありえない.

BRST 電荷 $\mathcal{Q}$ およびゴースト数演算子 $\mathcal{N}$ によって (A.141) と (A.150) で生成される変換にもとづく対称性は BRST 対称性と呼ばれる.

ここで本題に進もう. それは, ゲージ変換の自由度が固定された, 矛盾を含まないゲージ場の量子系の運動方程式を見いだすことである. ゲージ変換は実数で数えて d_G 個の自由度があるので, それらの自由度を固定するには d_G 個の条件が必要である. それらの条件を与える関数を

$$F^a(x) \qquad a = 1, \cdots, d_G \tag{A.153}$$

としよう. $F^a(x)$ は $\Phi(x)$ のボソン的な実関数であり, たとえばクーロンゲージだと $F^a(x) = \vec{\nabla} \cdot \vec{G}^a(x)$ である. F^a のゴースト数は 0, $[\mathcal{N}, F^a] = 0$ とする. ゲージ変換の自由度を F^a で固定すると, $SU(N)$ のゲージ対称性は失われることになる. しかし, それに替るものとして BRST 対称性が実現されているので, それをゲージ原理に替る新たな原理とする. 目標は, BRST 変換のもとで対称性をもった運動方程式を導き出すことである.

ゲージ固定関数 $F^a(x)$ を用いてゴースト数が -1 のフェルミオン的な 4 次元積分量

$$\mathcal{F} = \int d^4x\ \bar{C}^a(x)F^a(x) \tag{A.154}$$

を定義し，その BRST 変換を

$$\mathcal{F}^\lambda = \mathcal{F} + \lambda\mathcal{G}\ , \qquad \lambda\mathcal{G} \equiv [\lambda\mathcal{Q}, \mathcal{F}] \tag{A.155}$$

とおく．$\mathcal{G}$ は $F^a(x)$ の BRST 変換

$$F^{\lambda a}(x) = F^a + \lambda K^a(x) \tag{A.156}$$

により

$$\mathcal{G} = \int d^4x\ \left(\frac{1}{g}B^a(x)F^a(x) - \bar{C}^a(x)K^a(x)\right) \tag{A.157}$$

と表されるが，BRST 変換のベキ零性 (A.140) により $\mathcal{G}$ は変換に対して不変

$$\mathcal{G}^\lambda = \mathcal{G} \tag{A.158}$$

である．また，条件 $[\mathcal{N}, F^a] = 0$ によりスケール変換不変性 $\mathcal{G}_\rho = \mathcal{G}$ も実現されている．

$\Phi(x)$ を任意の微少量 $\delta\Phi(x)$ だけ変化させたときの $\mathcal{G}$ の変化量 $\delta\mathcal{G}$ を

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{G} &= \sum_\Phi \int d^4x\ \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Phi(x)}\delta\Phi(x) \\ &= \int d^4x \left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta C^a(x)}\delta C^a(x) + \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\bar{C}^a(x)}\delta\bar{C}^a(x) + \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta B^a(x)}\delta B^a(x)\right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta G^a_\mu(x)}\delta G^a_\mu(x)\right)\end{aligned} \tag{A.159}$$

と表そう．もし座標微分 ∂_μ が $\delta\Phi(x)$ にかかっているときには，部分積分して ∂_μ が係数関数 $\delta\mathcal{G}/\delta\Phi(x)$ にかかるように手直しされているものとする．$\mathcal{G}$ が停留値 $\delta\mathcal{G} = 0$ となるのは $\Phi(x)$ がすべての係数関数について

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Phi(x)} = 0\ , \qquad \Phi = C^a, \bar{C}^a, B^a, G^a_\mu \tag{A.160}$$

を満たしているときである．$\mathcal{G}$ は BRST 変換不変であるから $\Phi(x)$ が $\mathcal{G}$ の停留点であれば，それを BRST 変換した $\Phi^\lambda(x)$ も $\mathcal{G}$ の停留点となる．したがって

$$\left(\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\Phi(x)}\right)^\lambda = 0 \tag{A.161}$$

が成り立つ．すなわち方程式の組 (A.160) は BRST 変換について対称である．

ゲージ場 $G_\mu^a(x)$ の「古典的」な運動方程式 (A.115) はゲージ場の作用積分 (A.116) の停留点を定める方程式であった．$\mathcal{I}_g$ は $SU(N)$ のゲージ変換について不変であったが，BRST 変換 (A.130) は $G_\mu^a(x)$ にとっては $SU(N)$ のゲージ変換の 1 種だから，もともとの $SU(N)$ のゲージ不変性によって BRST 不変性 ${\mathcal{I}_g}^\lambda = \mathcal{I}_g$ も保証されている．したがって，量子系全体の作用積分を

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_g + g\,\mathcal{G} \tag{A.162}$$

とすると，$\mathcal{I}^\lambda = \mathcal{I}$ であり，$\delta\mathcal{I} = 0$ の変分原理から導かれる方程式のセットは，BRST 変換のもとで対称である．このようにして BRST 対称性をもったゲージ場の量子系の運動方程式

$$[D_\nu G^{\nu\mu}(x)]^a + g\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta G_\mu^a(x)} = 0\ , \tag{A.163}$$

$$\frac{\delta\mathcal{G}}{\delta C^a(x)} = 0\ ,\quad \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta\bar{C}^a(x)} = 0\ ,\quad \frac{\delta\mathcal{G}}{\delta B^a(x)} = 0 \tag{A.164}$$

が求まる．これらの方程式が成り立つとき，BRST 変換した場についても同じ形の方程式が成り立つことは，実際に BRST 変換をすることによって確かめることができる（ヤコビの恒等式による等式 $[D_\mu, [D_\nu, G^{\nu\mu}]] = 0$ を用いる必要がある）．

具体的なゲージ固定関数 $F^a(x)$ として，よく用いられる関数（広義のローレンツゲージ）

$$F^a(x) = \partial^\mu G_\mu^a(x) + \frac{1}{2}\alpha B^a(x) \tag{A.165}$$

について見ておこう．α はゲージパラメターと呼ばれる実数である．この場合 $K^a = (i/g)\partial^\mu(\partial_\mu C^a - gf^{abc}G_\mu^b C^c)$ で $\mathcal{G}$ は

$$\mathcal{G} = \frac{1}{g}\int d^4x\left(B^a(\partial^\mu G_\mu^a + \frac{1}{2}\alpha B^a) - i\bar{C}^a\partial^\mu(\partial_\mu C^a - gf^{abc}G_\mu^b C^c)\right) \tag{A.166}$$

となる．運動方程式 (A.163),(A.164) は

$$[D_\nu G^{\nu\mu}]^a = \partial^\mu B^a - igf^{abc}\partial^\mu\bar{C}^b C^c\ , \tag{A.167}$$

$$\partial^\mu G_\mu^a + \alpha B^a = 0\ , \tag{A.168}$$

$$\partial^\mu(\partial_\mu C^a - gf^{abc}G_\mu^b C^c) = 0\ , \tag{A.169}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{C}^a - g f^{abc} G^b_\mu \partial^\mu \bar{C}^c = 0 \ , \tag{A.170}$$

行列の形で表すと

$$\begin{aligned} [D_\nu, G^{\nu\mu}] &= \partial^\mu B - g\{\partial^\mu \bar{C}, C\} \ , \ \partial^\mu G_\mu + \alpha B = 0 \ , \ \partial^\mu [D_\mu, C] = 0 \ , \\ [D_\mu, \partial^\mu \bar{C}] &= 0 \end{aligned} \tag{A.171}$$

と求まる．B は (A.168) によって G_μ で表されるので，それ独自の力学的自由度はもたない．ゴースト $C, \bar{C}$ は 0 質量である．電磁相互作用のときには群の構造定数は $f^{abc} = 0$ なので，ゴーストは電磁場と相互作用しない自由粒子になる．それらはまさに幽霊であって，いてもいなくても物理現象には影響しない．しかし，$SU(N)$ のゲージ系においてはそれらはゲージ場と相互作用するので，それらの運動もきちんと取り込まなければならない．

ゲージ場の量子系の運動方程式 (A.163), (A.164) は，ゲージ変換の不定性が完全に固定されているので，それらをハイセンベルグの運動方程式として実現するハミルトニアン $\mathcal{H}$ が存在し，実際にそれを構成することができる．したがって，量子系の運動は不定性なしに定まる．しかし，それらが表現している量子的な状態のすべてが物理的に意味のある情報を含んでいるわけではない．その状態空間にはゲージ粒子だけでなくゴースト粒子も登場する．しかもそれらの運動方程式はゲージ固定関数 F^a をどうとるかという人為にも依存している．

2 つの量子状態 $|\Psi_\mathrm{i}\rangle, |\Psi_\mathrm{f}\rangle$ の行列要素

$$M_\mathrm{fi} = \langle \Psi_\mathrm{f} | \Psi_\mathrm{i} \rangle \tag{A.172}$$

が物理的に意味のある情報を与えているとすると，M_fi はゲージ固定関数 F^a の取り方にはよらないはずである．すなわち F を任意の微少量 ΔF だけ変化させたときの M_fi の変化量は $\Delta M_\mathrm{fi} = 0$ でなければならない．場の量子論の手法に従ってこの変化量を求めると

$$\begin{aligned} \Delta M_\mathrm{fi} &= i \frac{g}{c\hbar} \langle \Psi_\mathrm{f} | \Delta \mathcal{G} | \Psi_\mathrm{i} \rangle \\ &= i \frac{g}{c\hbar} \langle \Psi_\mathrm{f} | \{\mathcal{Q}, \Delta \mathcal{F}\} | \Psi_\mathrm{i} \rangle \end{aligned} \tag{A.173}$$

が導かれる．ここに 2 番目の等号で (A.155) を用いた．これが任意の ΔF について成り立つためには

$$\mathcal{Q} | \Psi_\mathrm{i} \rangle = \mathcal{Q} | \Psi_\mathrm{f} \rangle = 0 \tag{A.174}$$

が満たされていなければならない.

物理的に意味のある情報を含んだ状態 $|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle$ は $\mathcal{Q}|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle = 0$ である（この条件は九後と小嶋によって見いだされた）. これは $|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle$ が BRST のユニタリー変換のもとで不変

$$e^{\lambda\mathcal{Q}}|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle = |\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle \tag{A.175}$$

であることを意味している. 運動方程式が BRST 変換のもとで対称だということは, $(\Phi(t))^{\lambda} = \Phi^{\lambda}(t)$, すなわち量子状態の時間発展を生成する量子系のハミルトニアン $\mathcal{H}$ が BRST 変換を生成する $\mathcal{Q}$ と可換だということを意味している. したがって $|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle$ はどのように時間発展しても $|\Psi_{\mathrm{phys}}\rangle$ の状態空間にとどまる.

アクシャルゲージと呼ばれる, ゲージ場 G_{μ}^{a} の空間成分の 1 つ, たとえば G_{3}^{a} を 0 とするゲージ固定関数 $F^{a} = G_{3}^{a}$ を採用すると, ゴーストはゲージ場と相互作用せず, ゲージ場の自由度も 2 成分だけになり, 物理的でない自由度が一切現れないことが示せる. 観測可能量は F^{a} に依存しないのでそれらはアクシャルゲージで求めたものと等しくなる. したがってどのようなゲージ固定関数 F^{a} を用いて計算しても観測可能な物理量の最終結果は一致し物理的に意味のある答を与える. たとえばローレンツゲージ (A.165) を用いて何らかの量を計算すると, 計算の途中の段階ではあちらこちらにゲージパラメター α が現れる. しかし最終的な物理量にまとめると α 依存性は消え去る.

あとがき

素粒子のいろいろな現象をつぶさに調べることにより，ミクロの世界にも様々なことが起っていることを見てきた．しかし，これらは自然のミクロの姿の全貌からすると，ほんの入り口付近の景色にすぎない．これまでにわかってきたのは，素粒子の標準理論で記述される 10^{-17} m 辺りまでの世界であり，その先の極微の世界がどうなっているのかの解明はこれからの素粒子物理学と高エネルギー物理学の研究の進展に託されている．

スーパー·カミオカンデに代表される幾つかの実験により，ニュートリノに関して多くの情報が蓄積されている．それらの情報は，ニュートリノの質量を $m_\nu = 0$ とする標準理論では理解できない，「ニュートリノ振動」と呼ばれるニュートリノのフレーバー ($\nu_{\rm e}$, ν_μ, ν_τ) が運動とともに変化する現象が起っていることを示している．ニュートリノ振動以外でも，クォークやレプトンのフレーバーに関わる様々な現象に注目した種々な実験によって，標準理論の先の，さらにミクロな世界の姿を垣間見る探索が進められている．

近年の宇宙·天体観測の飛躍的な進展も素粒子の世界に重要な情報を与えている．宇宙に満ちているらしい暗黒エネルギーや暗黒物質は，素粒子の標準理論では理解することができない．特に，暗黒物質の謎を解く鍵は 10^{-18} m の素粒子の世界に潜んでいると考えられている．

まだ発見されていないヒッグス粒子の探索や，これら様々な謎の解明を目指して，2010 年には欧州原子核研究機構 (CERN) の Large Hadron Collider が運転を開始した．それは，10^{-18} m の世界を直接探索する実験であり，多くの貴重な情報が得られると期待されている．近い将来，標準理論では描ききれなかった超ミクロの世界の刻明な姿が明らかになると予測されている．

あとがき

この本の目的は「まえがき」で書いたように，大学の理工系学部で勉強した物理の基本的な考え方や方法によって，現代の素粒子物理学の到達点を理解することであった．どこまでその目標に近づけたかは一人ひとりの読者によって異なるであろうが，皆それぞれに，自分が身に付けてきた学問によって，現代物理学の最先端に実感をもって触れることができたのではないかと期待している．学部学生時代には，その時に勉強している事柄が将来どのように自分自身に反映されるのかを見通すことは難しい．この本を読み終えて感じてもらえたと思うが，新しい概念が生み出されたり，あるいは，新しい原理が認識されるようになるときに，決定的な役割を果たす力は，それまでに積み重ねられてきたもろもろの基礎となっている，基本的なものの考え方の中に潜んでいる．現在自分が身に付けているものによって，これだけ深く自然の真理に迫ることができたのだという感動を噛み締めてほしい．そして，物理学の基礎をしっかりと勉強してきた今，自分の将来についても大きく思いを巡らせてほしい．

私は素粒子物理学の一理論研究者であり，物理学全体，ましては基礎科学全般に関わることに言及する素養も見識も持ち合わせていない．私の極めて限られた経験を通して感じていることを，それはとても偏った意見であることは重々自覚しているが，この「あとがき」の最後に書き残しておきたいと思う．

この本の読者である学部学生諸君にはいろいろな人たちがいるであろう．学部を卒業して会社に入る人，大学院修士課程まで修了して社会に出ていく人，博士課程に進学して研究者を目指す人，それぞれに様々な人生をたどるであろう．これまで君たちが学んできた物理学は，数学とともに，基礎科学の根幹をなすものである．それは科学的なものの考え方を支える土台である．この本をここまで読み進むことができたということは，君たちにその力がしっかりと身に付いていることを表している．将来どのような道に進むとしても，その力は君たちの歩む足元を確かなものとしてくれるであろう．

加えて一言いうが，君たちはすでに重要な社会的役割を期待されている．大学が社会に送り出す人材として，物事を基本に立ち返って科学的に熟考することのできる人を育てたということである．現代社会はめまぐるしくその環境を変化させながら，絶え間ない進化変転をしている．その変化が将来にわたって望ましい形で維持されるためには，変化への正当で的確な評価が，社会的良識のもとに，厚みをもった層による合意として共有されていることが重要である．その層が確実に保たれることは，信頼感を伴った社会の成熟のためには不

可欠である．それは，いわゆる科学者や研究者のみで閉じて構成されるべきものではない．君たちすべてがその層の構成員になっているのである．

締めくくりとして，研究者を目指す人たちに伝えておく．今は何を言っているのかわからないかも知れないが，将来，何らかの時点で思い出してくれれば幸いである．研究の進め方は人それぞれに千差万別である．また，分野によってもやり方は全く異なるであろう．しかし1つだけはっきりと言えることがある．未知の領域で研究を進めるにあたって心すべきことは，自分は「何が一番重要で基本的なこと」と確信できるかを，徹底的に突き詰めることである．これは極めて主観的な作業である．中途半端で安易な主観性はただの主観止まりである．とことんまでやらなければならない．「主観」を究めてたどり着いた結論は，極めて「客観的」であり，ものごとの本質を突いているものである．

この本が君たちの将来に何らかの形で役に立てればと祈っている．

平成23年9月　　　　著者記す

索　引

【マ行】

【ヤ行】

【ラ行】

【ワ行】

著者略歴

井上研三（いのうえ　けんぞう）

1947年　福岡県に生まれる
1971年　九州大学理学部物理学科卒業
1976年　九州大学理学博士
1978年　九州大学理学部助手
1990年　東北大学理学部助教授
1992年　京都大学基礎物理学研究所教授
1996年　九州大学理学部教授
2012年　九州大学名誉教授

九州大学素粒子理論研究室
http://higgs.phys.kyushu-u.ac.jp/

素粒子物理学

Elementary Particle Physics

2011年10月15日　初版1刷発行
2012年 4 月25日　初版2刷発行

検印廃止
NDC 429.6

ISBN 978-4-320-03479-2

著　者　井上研三　© 2011

発行者　南條光章

発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向 4-6-19
電話　03-3947-2511（代表）
郵便番号 112-8700 ／振替口座 00110-2-57035
URL http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印　刷　啓文堂
製　本　ブロケード

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan